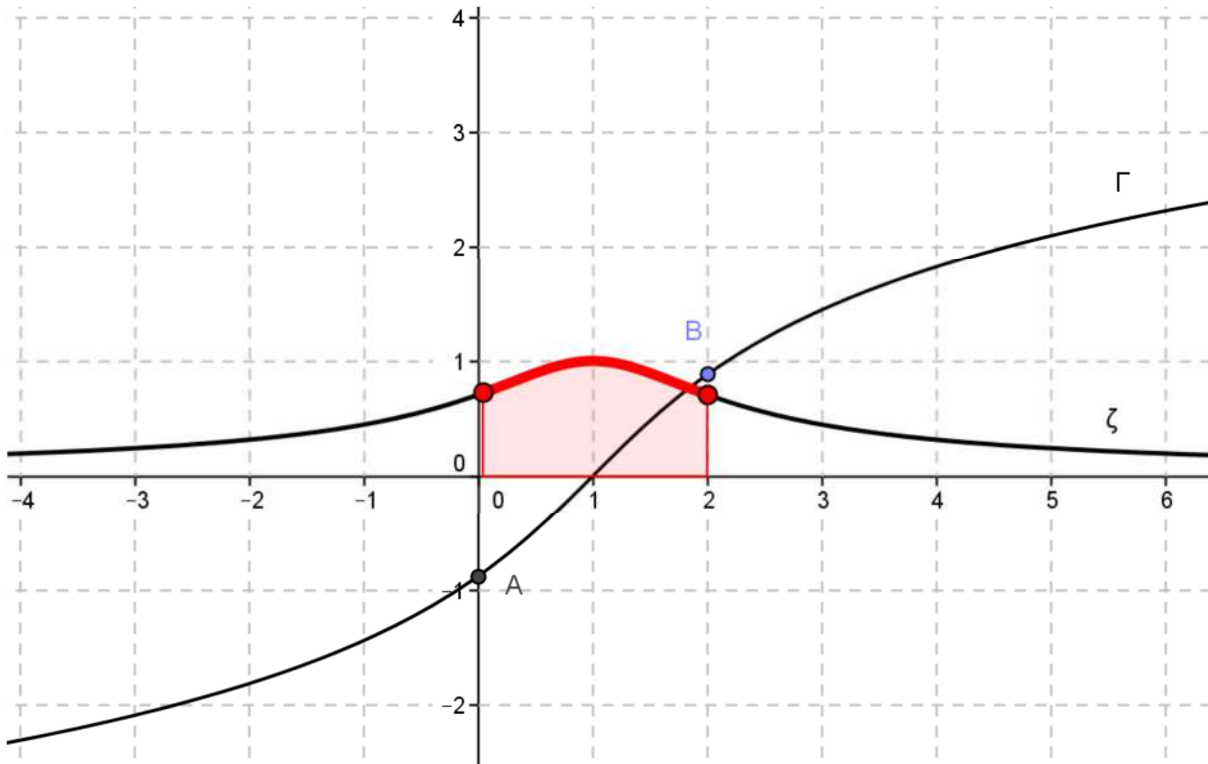


4
pts

EXERCICE N°1

Dans le graphique ci-dessous Γ et ζ sont des courbes représentatives dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ fonction et de sa fonction dérivée f' .



- La courbe Γ passe par les points $A(0, \ln(\sqrt{2}-1))$ et $B(2, \ln(\sqrt{2}+1))$ et admet deux branches paraboliques de direction $(O, \vec{i})$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$
 - La courbe ζ admet une asymptote : $y = 0$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$
- 1) Par lecture graphique :
 - a) Déterminer parmi les courbes Γ et ζ celle qui représente la fonction f'
 - b) Calculer l'aire de la partie hachurée
 - 2) On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2})$

Montrer que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

- 3) On pose $I_0 = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t^2-2t+2}} dt$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^2 \frac{(t-1)^{2n}}{\sqrt{t^2-2t+2}} dt$ et $k = \int_0^2 \sqrt{t^2-2t+2} dt$
 - a) Montrer que $I_0 + I_1 = k$
 - b) En utilisant une intégration par partie sur I_1 , montrer que $I_1 + k = 2\sqrt{2}$
 - c) Déterminer alors I_1
- 4) En remarquant que $x^2-2x+2 = (x-1)^2+1$, montrer que $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq f'(x) \leq 1$.
- 5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\sqrt{2}}{2n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{2n+1}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

EXERCICE N°2

Une urne contient 10 boules : $\begin{cases} 4 \text{ boules blanches numérotées } 1,1,1,1 \\ 3 \text{ boules rouges numérotées } -1,0,0 \\ 3 \text{ boules noires numérotées } -1,-1,0 \end{cases}$

1°) Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.

Soit X l'aléa numérique prenant pour valeur le nombre de boules blanches obtenues.

a) Définir la loi de probabilité de X

b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

2°) On répète l'épreuve précédente n fois de suite, n étant supérieur à 2 en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne.

a) Montrer que la probabilité p_n d'obtenir au moins une fois 3 boules blanches est :

$$p_n = 1 - \left(\frac{29}{30}\right)^n$$

b) Déterminer la plus petite valeur de n tel que $p_n \geq 0,3$.

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

3°) Un joueur tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.

* Si le nombre de boules blanches est égal à 0, il remet les boules dans l'urne et procède à un tirage simultané de 2 boules et le joueur gagne (le gain est algébrique) la somme des numéros marqués sur les deux boules tirés.

* Si le nombre de boules blanches est égal à 1, il gagne 1 point.

* Si le nombre de boules blanches est 2 ou 3, il remet les boules tirées et procède à un nouveau tirage d'une seule boule et gagne le numéro marqué sur cette dernière.

Soit Y l'aléa numérique prenant pour valeur le gain du joueur.

a) Démontrer que les valeurs prises par Y sont : $\{-2; -1; 0; 1, 2\}$

b) Vérifier que $p(y=0) = \frac{7}{45}$ et Déterminer la loi de probabilité de Y .

c) Calculer $E(Y)$, le jeu est-il favorable au joueur ?

EXERCICE N°3

On considère le cube ABCDEFGH ci-contre où I est le milieu de [EF] et J est le centre de la face ADHE.

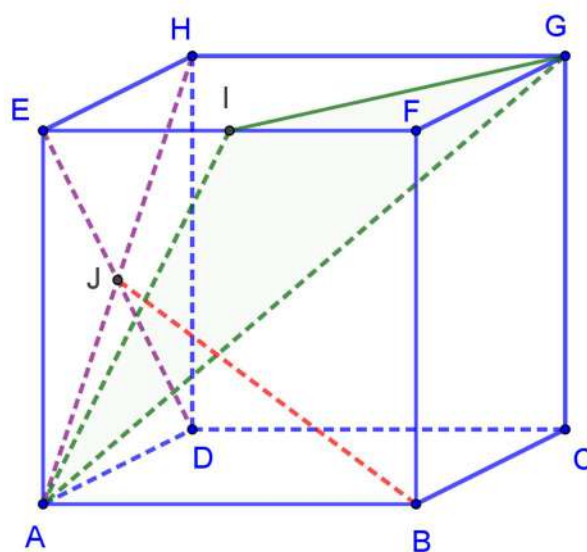
On rapporte l'espace au repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

- 1)
 - a. Déterminer les coordonnées des points B, I, J et G.
 - b. Calculer les composantes du vecteurs $\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AG}$.
 - c. Montrer alors qu'une équation cartésienne du plan (AIG) est : $2x - y - z = 0$.

2) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant : $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 1 = 0$.

- a. Montrer que S est une sphère de centre B dont on déterminera son rayon.
- b. Montrer que S est tangente au plan (AIG) puis déterminer les coordonnées du point de contact H.

3) Soit le plan P_m d'équation cartésienne : $x + z + m = 0$ où m est un paramètre réel.



- a. Etudier suivant les valeurs de m la nature de l'intersection de S et P_m .
- b. Caractériser l'intersection de S et P_0 où P_0 est le plan P_m pour $m = 0$.

4) Soit K le symétrique du point C par rapport au point G et L le point défini par : $\overline{AL} = \frac{1}{3} \overline{AK}$.

- a. Montrer que le triangle BLD est rectangle en L .
- b. Soit α un réel et le point $M(1, \alpha, \alpha)$.
 - i/ Montrer que M est un point de la droite (BG) .
 - ii/ Calculer la distance de M à la droite (DL) en fonction de α puis déterminer la position de M pour que cette distance soit minimale.

6,5
pts

EXERCICE N°4

I/ Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2 + 2 \ln x$.

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- 2) Dresser le tableau de variation de g .
- 3) En déduire le signe de $g(x)$, pour tout $x \in]0, +\infty[$.

II/ Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{a}{x} + b \frac{\ln x}{x}$, où a et b sont deux réels.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On admet que la droite Δ d'équation cartésienne : $y = x$ est une tangente à C_f au point d'abscisse 1.

- 1) Déterminer $f'(x)$ en fonction de a et b pour tout réel $x \in]0, +\infty[$.
- 2) En déduire que $a = 1$ et $b = 2$ et que $f'(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x^2}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
- 3)
 - a. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
 - b. Dresser alors le tableau de variation de f
- 4) En utilisant la partie **I/**, étudier la position relative de C_f et Δ .
- 5) Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = \frac{2}{x}$.

On désigne par C_h sa courbe représentative dans le $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Montrer que les courbes C_f et C_h se coupent en un seul point A de coordonnées $\left(\sqrt{e}; \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$.

- 6) On a tracé dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes C_h et Γ de la fonction $x \mapsto \ln x$. (voir annexe)
 - a. En utilisant les courbes C_h et Γ construire le point $A\left(\sqrt{e}; \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$.
 - b. Tracer alors Δ et C_f .
- 7) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f ; l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=1$ et $x=e$.

FEUILLE À RENDRE AVEC LA COPIE

Nom : Prénom :

7
pts

EXERCICE N°4



