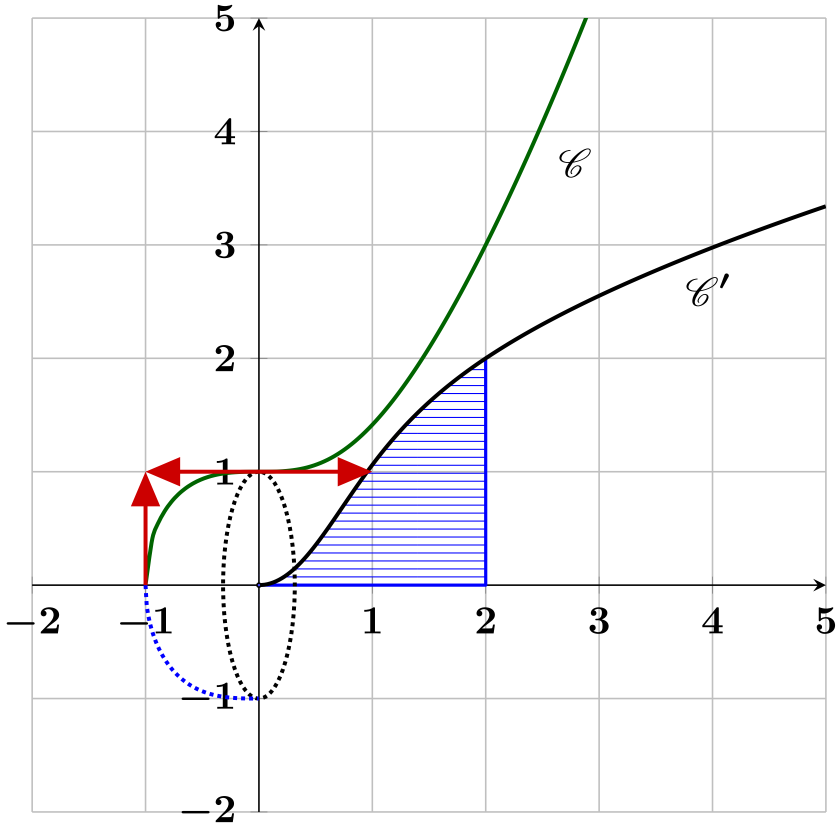
Lycée M.Messaadi Eljem PROF : Tahar Hassine A.SC : 2023 ∼ 2024	DEVOIR DE CONTRÔLE N°2	
	Épreuve : **MATHÉMATIQUES**	Classe : $4^{\text{ième}}$ **Sc-Exp**
	Durée : 2 h	Coefficient: **3**

Le sujet comporte 2 pages numérotées 1/2 et 2/2

Exercice 1: (6 points)

Dans la figure ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-1;+\infty[$ et la courbe $\mathscr{C}'$ est celle de la restriction de f' sur $[0;+\infty[$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.



1. Déterminer, en utilisant le graphique, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie hachurée.

   Dans la suite de l'exercice, on prend : $f(x)=\sqrt{x^3+1}$.

2. On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit $\mathscr{S}$ le solide de révolution engendré par la rotation de l'arc AB de $\mathscr{C}$ autour de l'axe $(O;\vec{i})$ tel que $A(-1;0)$ et $B(0;1)$.
   Calculer le volume $\mathscr{V}$ de $\mathscr{S}$.

3. On pose pour tout entier $n\geq 1$, $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^nF(x)dx$, où F est la primitive de f sur $[-1;+\infty[$ qui s'annule en 1.

   a. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}dx$, en déduire la valeur de I_1.

   b. Déterminer le sens de variation de F sur $[-1;+\infty[$, en déduire le signe de $F(x)$ pour tout $x\in[-1;+\infty[$

   c. Montrer que $I_n\leq 0$ pour tout $n\geq 1$.

   d. Montrer que la suite (I_n) est croissante, en déduire qu'elle est convergente.

Exercice 2: (8 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,2]\backslash\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 a) Étudier la dérivabilité de f à gauche en 2.

b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2 Montrer que le point $I(1,0)$ est un centre de symétrie pour $\mathscr{C}_f$.

3 a) Montrer que pour tout réel $x\in]0,2[\backslash\{1\};\ f'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2\sqrt{2x-x^2}}$.

b) Dresser, le tableau de variation de f.

4 Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique $\alpha\in]1,2]$. Vérifier que : $1,5<\alpha<1,6$.

5 Tracer $\mathscr{C}_f$.

6 Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1,2]$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer Γ la courbe de g^{-1} dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

7 Soit A l'aire en unité d'aires (u.a) du domaine du plan limité par C_f l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=\alpha$ et $x=2$.

Soit A' l'aire en unité d'aires (u.a) du domaine du plan limité par C_f et Γ et les axes du repère.

a) Montrer que pour tout réel $x\in[\alpha,2]; f(x)\leq\alpha$.

b) En déduire que : $\mathbf{A}\leq 2\alpha-\alpha^2$.

c) Montrer que : $\mathbf{A}'\leq 3\alpha-\sqrt{2\alpha-\alpha^2}$.

Exercice 3: (6 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points $A(1,1,2)$, $B(0,-2,0)$, $C(0,0,2)$ et $I(-1,2,-1)$.

1 a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) Vérifier que le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre $ABCI$ est égal à 2 .

c) En déduire la distance du point I au plan (ABC)

2 On désigne par $\mathcal{P}$ le plan (ABC).

Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $x-y+z-2=0$.

3 Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tel que: $x^2+y^2+z^3+2x-4y+2z-6=0.$

a) Montrer que (S) est la sphère de centre I et de rayon $2\sqrt{3}$.

b) Montrer que (S) et $\mathcal{P}$ sont tangents et déterminer les coordonnées de leur point de contact H.

4 Soit le plan $\mathcal{P}_m$ d'équation $x-my+z-m-1=0$ où m, est un paramètre réel.

a) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, les positions relatives de (S) et $\mathcal{P}_m$.

b) Déterminer et caractériser l'ensemble $\mathscr{E}=(S)\cap\mathcal{P}_{-1}$.

5 a) Montrer que $\mathcal{P}_{-1}$ et $\mathcal{P}$ sont sécantes suivant une droite (Δ) dont on donnera une représentation paramétrique.

b) Déterminer $(S)\cap(\Delta)$.