LYCEE SAID BOU BAKKER **MOKNINE** **2019/2020**	**Devoir de synthèse 2** **Mathématiques** **Durée : 3 heures**
$4^{ème}$ **Sciences 3**	**Mr. Salah Hannachi**

Le sujet comporte quatre exercices répartis en trois pages

EXERCICE 1 : 7 points

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = 2x - x.lnx \quad si \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par $(\mathcal{H})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. En déduire une interprétation géométrique

2) Montrer que $f'(x) = 1 - lnx,\ \ \forall\, x > 0$, puis établir le tableau de variation de f.

3) a) Dans **l'annexe ci-jointe** on a représenté la courbe (C) de la fonction ln et la droite $\Delta : y = x$. En exploitant ce graphique, placer dans le repère $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ les points de la courbe $(\mathcal{H})$: A(e,e) et B d'abscisse e^2.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. En déduire une interprétation géométrique.

c) Montrer que $\forall\ x \in]0,e]$, on a : $f(x) \geq x$

d) Tracer la courbe $(\mathcal{H})$ dans le même repère $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

4) Soit $\lambda \in]0,e[$. On note $\mathcal{A}_\lambda$ l'aire en $(u.a)$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{H})$, la droite Δ et les droites d'équations : $x = \lambda$ et $x = e$.

a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $\int_\lambda^e x.lnx.dx = \frac{e^2}{4} - \frac{\lambda^2}{2} ln\lambda + \frac{\lambda^2}{4}$

b) Calculer alors l'aire $\mathcal{A}_\lambda$ puis calculer $\lim\limits_{\lambda\to0^+} \mathcal{A}_\lambda$.

5) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,e]$ sur un intervalle J qu'on précisera.

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $f(x) = \frac{e}{n}$ admet une unique solution α_n dans l'intervalle $[0,e]$. Vérifier que $\alpha_1 = e$.

c) Montrer que la suite (α_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$

EXERCICE 2 : 5 points

I/ Soit la suite réelle (u_n) définie sur IN par : $u_n = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)^n} dt$

1) Montrer que pour tout $n \in IN$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^{n+1}} dt$

2) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in IN^*$:
$\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^{n+1}} dt = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{\sqrt{3}}{4^n}\right) + \frac{1}{2n} u_n$

3) En déduire que : $u_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} u_n - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{\sqrt{3}}{4^n}\right)$ pour tout $n \in IN^*$.

II/ Soit F la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $\mathrm{F}(x) = \int_1^{tan^2 x} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} dt$

1) Montrer que la fonction F est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\mathrm{F}'(x) = 2$

2) Calculer $\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{4}\right)$. En déduire que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $\mathrm{F}(x) = 2x - \frac{\pi}{2}$

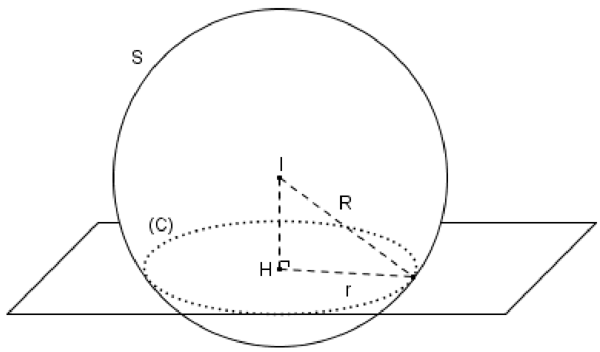
3) Montrer alors que : $u_1 = \frac{\pi}{6}$

4) Soit dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ l'arc $\mathcal{C} = \left\{M(x,y) \;;\; y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}(1+x)} \text{ et } 1 \leq x \leq 3\right\}$
et S le solide obtenu par rotation de $\mathcal{C}$ autour de l'axe $(\mathrm{O}, \vec{\imath})$.
Calculer (en $u.v$) le volume $\mathcal{V}$ du solide S.

EXERCICE 3 : 6 points

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit les points A(3,2,6) ; B(1,2,4) et C(4,−2,5).

1) a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
   b) En déduire que les points A , B et C déterminent un plan qu'on notera P.
   c) Montrer qu'une équation du plan P est $2x + y - 2z + 4 = 0$.
2) Soit (S) l'ensemble des points $\mathrm{M}(x, y, z)$ de l'espace tels que :
   $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 6$
   a) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.
   b) Montrer que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) dont on précisera le centre H et le rayon r.



3) Soit les points E(0,3,-1) , F(4,1,1) et G(-2,1,1).
   a) Montrer que [FG] est un diamètre de S.
   b) Vérifier que $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG} = 0$.
   c) Déterminer une équation cartésienne du plan Q passant par E et tangent à S.

4) Soit la droite Δ définie par le système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 4 + \alpha \end{cases} \;;\; \alpha \in IR$
   Montrer que la droite Δ coupe la sphère S en deux points L et T qu'on précisera les coordonnées.

Nom et prénom...

Annexe à rendre avec la copie

EXERCICE 4 : ***2 points***

Pour chacune des propositions suivantes, une seule réponse est correcte. Cocher la sans justifier :

1) La suite (I_n) définie sur IN par : $I_n = \int_0^n \sqrt{x}\, sin^2 x . dx$ est une suite :

a) croissante **b)** décroissante **c)** stationnaire

2) Soit le réel $\boldsymbol{I = \int_{-1}^{1} \frac{tanx}{x^2+1}.dx}$. Alors :

a) $\boldsymbol{I} < 0$ **b)** $\boldsymbol{I = 0}$ **c)** $\boldsymbol{I} > 0$

3) On pose pour tout $\boldsymbol{x} \in \left[\boldsymbol{0}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{4}}\right[$, $\boldsymbol{F(x) = \int_1^{tanx} \sqrt[3]{t}.dt}$. Alors :

a) $\boldsymbol{F(x)} < 0$ **b)** $\boldsymbol{F(x) = 0}$ **c)** $\boldsymbol{F(x)} > 0$

4) Soit f une fonction continue sur $[2,5]$ telle que : $\boldsymbol{1 \leq \overline{f} \leq 2}$ alors :

a) $\frac{1}{3} \leq \int_2^5 f(x)dx \leq \frac{2}{3}$ **b)** $\boldsymbol{3} \leq \int_2^5 f(x)dx \leq \boldsymbol{6}$ **c)** $\boldsymbol{1} \leq \int_2^3 f(x)dx \leq \boldsymbol{2}$

Figure de l'exercice 1