Devoir de synthèse N°2

Mathématiques

$4^{\text{éme}}$ sc.exp . Durée :3h

Lycée Chebbi Tataouine

Prof : Hajji Mohamed

Exercice n°1 :(05 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$**.**

On considère les points $A(-1,-1,3)$, $B(0,-3,1)$ **et** $C\ (-3,0,1)$.

1. a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$**.**

b) Déduire que les points A, B **et** C **déterminent un plan** P**.**

c) Vérifier qu'une équation cartésienne de P **est :** $2x+2y-z+7=0$

2. Soit le point $I(3,-1,2)$

a) Vérifier que le point I **n'appartient pas au plan** P

b) Calculer la distance $d(I,P)$

c) Calculer l'aire du triangle ABC

d) Déduire le volume du tétraèdre $ABCI$

3. Soit S **l'ensemble des points** $M(x,y,z)$ **de l'espace**

vérifiant : $x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z-11=0$

a) Montrer que S **est la sphère de centre** I **et de rayon** $R=5$

b) Montrer que le plan P **coupe la sphère** S **suivant un cercle** $\mathcal{C}$ **dont on précisera le centre** H **et le rayon** r **.**

4. Montrer qu'ils existent deux plans Q_1 **et** Q_2 **parallèles à** P **et tangents à** S **dont on donnera leurs équations**

Exercice n°2 : (05 points)

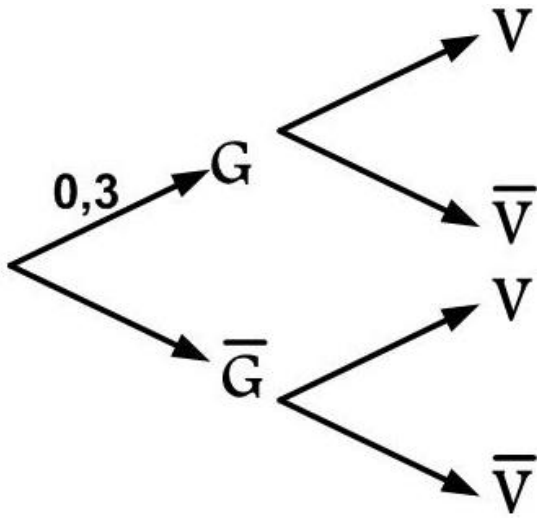
Une étude statistique montre que dans une ville donnée, 15 % des individus âgés de moins de 60 ans et 80 % des individus âgés de plus de 60 ans ont été vaccinés contre la grippe.

Les individus âgés de plus de 60 ans représentent 30 % de la population de cette ville.

On choisit, au hasard, une personne de cette population et on considère les évènements suivants :

- G **: " La personne est âgée de plus de 60 ans ".**
- V **: " La personne est vaccinée " .**

1) **Donner** $P(G)$, $P(V/G)$ **et** $P(V/\overline{G})$
2) **Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous**



3) **a) Calculer** $P(V\cap G)$ **et** $P(V\cap \overline{G})$

   b) Déduire que la probabilité pour qu'une personne soit vaccinée est égale à 0,345.

   c) La personne choisie étant vaccinée, quelle est la probabilité pour qu'elle soit âgée de moins de 60 ans ?

4) **On choisit au hasard 10 personnes de cette ville et on désigne par** X**: le nombre des personnes vaccinées parmi les 10 personnes choisies**

   a) Justifier que X **suit une loi binomiale**

   dont on précisera les paramètres

b) Calculer $P(X = 2)$

c) Calculer $E(X)$ **et** $V(X)$

5) On choisit, au hasard, n personnes de cette ville et on désigne par P_n **la probabilité que l'une au moins entre elles soit vaccinée**

a) Montrer que $P_n = 1 - (0,655)^n$

b) Déterminer la plus petite valeur de n **(nombre de personnes choisies) pour que** $P_n \geq 0,99$

c) Calculer $\lim_{n \to +\infty} P_n$ **et interpréter le résultat (lorsque le nombres de personnes choisies soient assez grand)**

Exercice n°3 : (03.5points)

Soit la suite (I_n) **définie sur** $\mathbb{N}$ **par :** $I_0 = \int_0^1 e^{-x}dx$

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}dx \qquad si\ n \geq 1$$

1) a. Montrer que $I_0 = 1 - \frac{1}{e}$

b. Montrer, en utilisant une intégration par parties, que :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$$

c. Calculer, alors, I_1 **puis** I_2

d. Déduire la valeur de $J = \int_0^1 (x^2 + x + 1)e^{-x}dx$

2) a. Montrer que $I_n \geq 0$ **pour tout** $n \epsilon \mathbb{N}$

b. Montrer que (I_n) **est décroissante**

c. Déduire que (I_n) **est convergente**

3) a. Montrer que pour tout $x \in [0,1], n \in \mathbb{N}$ $\quad \frac{x^n}{e} \leq x^n e^{-x} \leq x^n$

Puis déduire que $\frac{1}{e(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

b. Déterminer alors $\lim_{n \to +\infty} I_n$

Exercice n°4 : (06.5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1) a) Montrer que f est une fonction impaire
et interpréter graphiquement ce résultat

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.
Interpréter graphiquement les résultats

2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

3) Soit $g(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$

a) Montrer que $g$est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

b) Calculer $g(0)$ puis donner le signe de $g(x)$, suivant les valeurs de x dans $\mathbb{R}$

c) Déduire que si $x \geq 0$ alors $f(x) \leq x$

4) a) Ecrire une équation de la tangente T à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0

b)Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et T dans un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

5) Vérifier que $F(x) = 2\ln(e^x + 1) - x$, $(x \in \mathbb{R})$
est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, puis calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C}_f)$ et les droites d'équations respectives :
$x = 0, x = 1$ *et* $y = 0$

6) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera. (Soit f^{-1} la fonction réciproque de f)

b) Tracer $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ sur le même repère.

c) Montrer que pour tout $x \in J$: $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

7) Soit (U_n) la suite defenie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{4} \\ U_{n+1} = f(U_n) \; , \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq U_n \leq 1$

b) Montrer que (U_n) est décroissante

c) Déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite