

Devoir de Synthèse n° 2



Exercice 1 : (4 points)

Pour interroger ses élèves un professeur de mathématiques place dans un sac 30 cartons identiques :

20 de ces cartons portent chacun une question de complexe et les autres une question de statistique.

Un élève tire au hasard un carton de ce sac et répond à la question inscrite sur ce carton.

- ♦ La probabilité que l'élève réponde juste à une question est 0, 5.
- ♦ Si la question est de complexe, la probabilité que l'élève réponde juste 0, 6.

On considère les événements suivants :

C : « Le carton tiré porte une question de complexe ».

S : « Le carton tiré porte une question de statistique ».

J : « L'élève répond juste à la question tirée ».

On choisie au hasard un élève de cette classe.

- 1 a Déterminer $p(C)$, $p(J)$ et $p(J/C)$.
b Calculer $p(J \cap C)$ puis déduire que $p(J/S) = 0, 3$.
- 2 a Construire un arbre pondéré qui modélise la situation.
b L'élève a répondu juste à la question tirée, calculer la probabilité que cette question soit une question de statistique.
- 3 On choisie cinq élèves au hasard, quelle est la probabilité qu'il y en ait au moins un élève répond juste à la question tirée.
- 4 Le professeur attribue les notes suivantes :
 - 5 pour une réponse en complexe.
 - n pour une réponse juste en statistique.
 - -2 pour une réponse fausse.

Soit X : la variable aléatoire désignant la note obtenue par l'élève.

- a Déterminer la loi de probabilité de X .
- b Calculer en fonction de n l'espérance mathématique $E(X)$.
- c Pour quelle valeur de n , on a $E(X) = 1, 4$?

Exercice 2 : (6 points)

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient les points $A(-1, 5, 2)$; $B(-1, -3, -2)$; $C(3, -3, 2)$ et $D(-1, 3, 6)$.

- 1
 - a Déterminer les composantes du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.
 - b Vérifier que les points A, B et C déterminent un plan $\mathcal{P}$ dont une équation cartésienne est : $2x + y - 2z + 1 = 0$.
 - c Montrer que $ABCD$ est un tétraèdre et calculer son volume.
- 2 Soit S la sphère de diamètre $[BD]$.
 - a Écrire une équation cartésienne de la sphère S .
 - b Vérifier que la sphère S est circonscrite au tétraèdre $ABCD$.
 - c Montrer alors que le plan $\mathcal{P}$ coupe S suivant le cercle circonscrit au triangle ABC .
- 3 Soit le plan $Q_m : 3y + 4z - 16m - 1 = 0$, où $m \in \mathbb{R}$.
 - a Déterminer suivant les valeurs de m , la position de S et Q_m .
 - b Dédire que le plan Q_2 est tangent à la sphère S en un point que l'on déterminera.
- 4
 - a Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et Q_2 sont sécants suivant une droite Δ dont on déterminera une représentation paramétrique.
 - b Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{R}$ parallèle à Δ , perpendiculaire à Q_2 et passant par D .
 - c Montrer que le plan $\mathcal{R}$ coupe la sphère S suivant un grand cercle.

Exercice 3 : (4 points)

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{\sqrt{x}} dx$.

- 1
 - a À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_1 = 4 - 2\sqrt{e}$.
 - b Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $I_n \geq 0$.
 - c Montrer que la suite (I_n) est décroissante, puis déduire qu'elle est convergente.
- 2 Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $I_{n+1} = 2\sqrt{e} - 2(n+1)I_n$.
- 3
 - a Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\frac{2\sqrt{e}-2}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{e}}{n+1}$.
 - b En déduire la limite de (I_n) .

- 4 Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt[4]{x}}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Calculer le volume V de révolution engendré par la rotation de D autour de l'axe des abscisses où $D = \{M(x, y) \text{ tel que } y = f(x) \text{ et } 1 \leq x \leq e\}$.

Exercice 4 : (6 points)

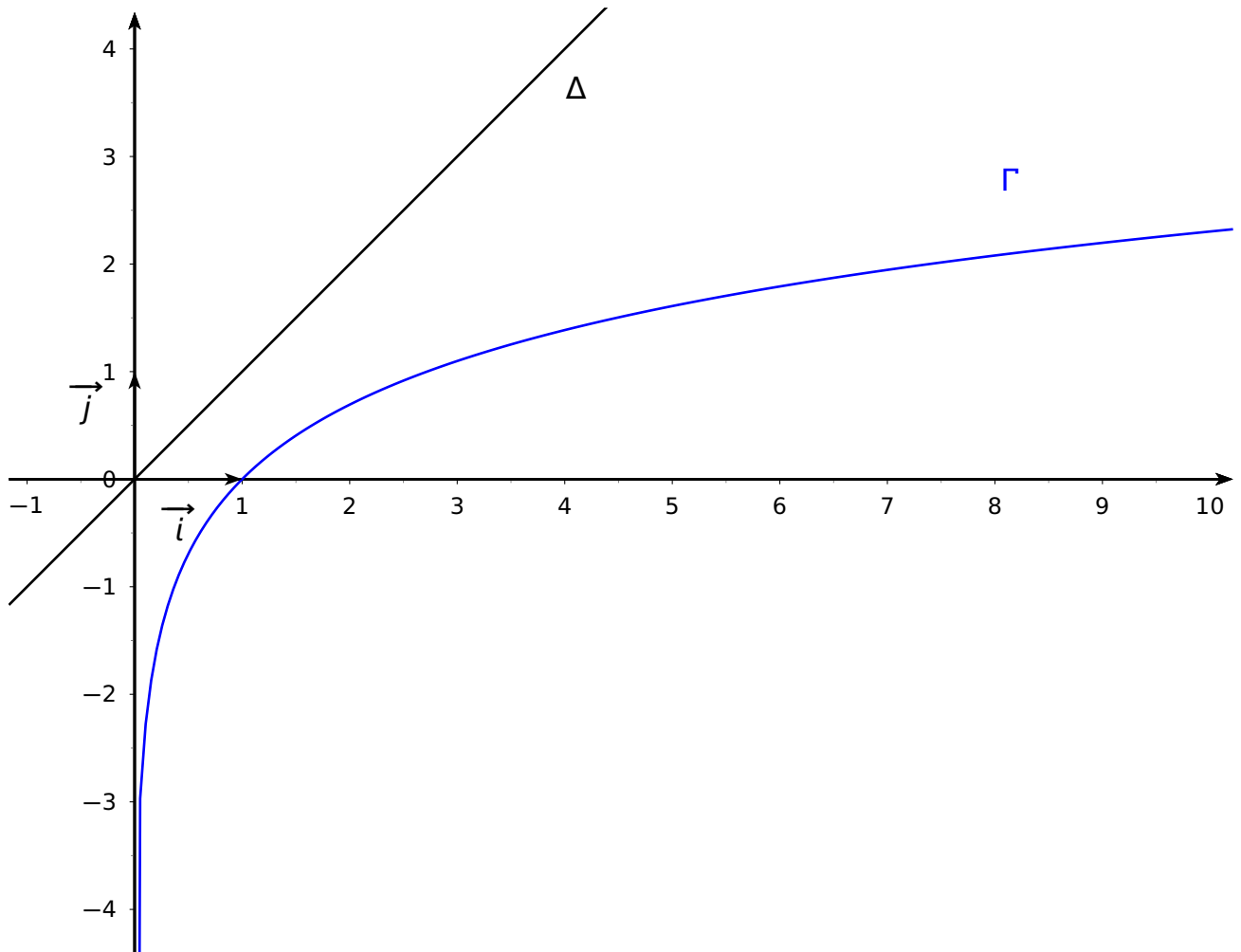
Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} 2x - x \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1
 - a Montrer que f est continue à droite en 0 .
 - b Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 2
 - a Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a : $f'(x) = 1 - \ln x$.
 - b Dresser le tableau de variation de f .
- 3 Dans l'annexe ci-jointe, on a représenté la courbe Γ de la fonction logarithme népérien et la droite $\Delta : y = x$.
En exploitant ce graphique, placer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points A et B de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives e et e^2 .
- 4
 - a Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
 - b Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et la droite Δ .
 - c Tracer $\mathcal{C}_f$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 5 Soit $\beta \in]0, e[$,
 - a À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_{\beta}^e x(1 - \ln x) dx = \frac{e^2}{4} + \frac{\beta^2}{2} \ln(\beta) - \frac{3\beta^2}{4}.$$
 - b En déduire l'aire en unité d'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite Δ et les droites d'équations respectives : $x = 0$ et $x = e$.
- 6
 - a Montrer que f réalise une bijection de $[0, e]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
 - b Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \frac{e}{n}$ admet une unique solution α_n dans l'intervalle $[0, e]$.
 - c Montrer que la suite (α_n) est décroissante en déduire qu'elle est convergente.
 - d Justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$. <http://mathematiques.kooli.me/>

Nom et Prénom :



<http://mathematiques.kooli.me/>