DEVOIR DE SYNTHÈSE N° 2 - MATHÉMATIQUES

CLASSE : $4^{ème}$ SECONDAIRE / SECTION:SCIENCES EXP/ DURÉE : 3 HEURES

PROF :BELLASSOUED MOHAMED /ANNÉE SCOLAIRE 2022-2023

EducMath Mathématiques

BAREME

EXERCICE 1 : 4 POINTS

Pour diagnostiquer une maladie du mouton, on a mis au point un test ,mais qui n'est pas parfait : il peut y avoir des faux positifs c'est-à-dire des moutons pour lesquels le test est positif et qui ne sont pas malades, et à l'inverse des faux négatifs pour lesquels le test est négatif alors que le mouton est bien atteint par la maladie.

- On note les événements : **M : « le mouton est malade »** **T : « le test est positif »** .
- On connaît les caractéristiques du test :
- **Sa sensibilité** qui est la probabilité que le test soit positif pour une bête est malade , que l'on suppose de **90%**
- **Sa spécificité** qui est la probabilité que le test soit négatif lorsque la bête est saine, que l'on suppose de **85%**

On suppose que **20%** des moutons d'une région sont atteints par la maladie

1-Construire un arbre pondéré résumant la situation. 0.75

2-Calculer les probabilités des événements : 1

F_+ : « le mouton est faux positif » **F_- : «le mouton est faux négatif »**

3-a-Montrer que $p(T)=0,3$ 0.5

b-Sachant que le mouton est négatif au test , calculer la probabilité qu'il ne soit pas malade 0.75

4-Montrer que la probabilité qu'il n'y ait pas d'erreur commise au test est $0,86$ (efficacité du test) 1

EXERCICE 2 : 3 POINTS

1-a-Donner l'écriture exponentielle du nombre complexe $u=4\sqrt{2}(-1+i)$ 0.5

b-En déduire que les racines cubiques de u sont : $u_0=2e^{i\frac{\pi}{4}}$; $u_1=2e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}$; $u_2=2e^{i\left(\frac{-5\pi}{12}\right)}$ 0.75

c-Soit θ un réel tel que $\theta\neq 2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$. Montrer que $\dfrac{1}{1-e^{i\theta}}=\dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}$ 1

3-Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathcal{E}$: $(2z-1)^3=4\sqrt{2}(-1+i)z^3$ .On donnera les solutions sous formes exponentielles 0.75

EXERCICE 3 : 4.5 POINTS

On considère les fonctions u et v définies respectivement sur $[0;1]$ et $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par $u(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ et $v(x)=\tan x$

1-a-Montrer que u est une bijection de $[0;1]$ sur $[0;1]$. On note u^{-1} la fonction réciproque de u 0.5

b- Vérifier que $u^{-1}(x)=u(x)$ pour tout $x\in[0;1]$ 0.5

2-a-Montrer que v est une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ sur $[0;1]$. On note v^{-1} la fonction réciproque de v 0.5

b-Vérifier que v^{-1} est dérivable sur $[0;1]$ et que $\left(v^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ pour tout $x\in[0;1]$ 0.5

c- En déduire que $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{4}$ 0.25

3-a- À l'aide d'une Une intégration par partie , Montrer que $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$ 0.75

b- En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$ 0.25

4-Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2+1}$.

On note F une primitive de f sur $[0;1]$ et G la fonction définie sur $[0;1]$ par $G(x)=F(u(x))$

a- Montrer que G est dérivable sur $[0;1]$ et que $G'(x)=f(x)-\dfrac{\ln 2}{1+x^2}$ 0.75

b-En déduire que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi\ln 2}{8}$ 0.5

EXERCICE 4 : 2.5 POINTS

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

BAREME

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x\ln(x^2+1)$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ de f et La courbe $\mathcal{C}_f^{-1}$ de sa fonction réciproque sont tracées sur la figure1 ci-dessous

On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $\mathcal{C}_f$; $\mathcal{C}_f^{-1}$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=\sqrt{e-1}$ **(Partie colorée en jaune)**

1-Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f. 0.75

2-a-Montrer que $\int_0^{\sqrt{e-1}} x\ln(x^2+1)\,dx=\frac{1}{2}$ (**indication** : une primitive de $x\mapsto \ln x$ est : $x\mapsto x\ln x-x$) 1

b-En déduire que $\mathcal{A}=e-2$ puis calculer $\int_0^{\sqrt{e-1}} f^{-1}(x)\,dx$ 0.75

EXERCICE 5 : 6 POINTS

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[\setminus\{e\}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln x}{\ln x-1} & \text{si } x\in\,]0;+\infty[\setminus\{e\} \\ f(0)=1 \end{cases}$. et $\mathbf{C_f}$ sa courbe représentative

1-Donner le signe de $f(x)$ sur $[0;+\infty[\setminus\{e\}$ 0.5

2-a-Montrer que f est continue à droite en 0 . 0.5

b-Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-1}{x}=-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat . 0.75

3-Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to e^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to e^-} f(x)$. 1

4- a-Montrer que pour $x\in\,]0;+\infty[\setminus\{e\}$ on a : $f'(x)=\dfrac{-1}{x(\ln x-1)^2}$ 0.75

b-Donner l'équation de la tangente T_A à la courbe $\mathbf{C_f}$ au point A d'abscisse $\frac{1}{e}$ 0.5

c- Montrer que le point A est un point d'inflexion de la courbe $\mathbf{C_f}$ 0.75

5- a-Soit la fonction g restriction de f à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

Montrer que g est une bijection de $[0\ ;\ 1]$ sur $[0\ ;\ 1]$. On note g^{-1} la fonction réciproque de g 0.25

b- La courbe $\mathbf{C_g}$ de la fonction g est tracée sur la figure 2 ci-dessous .

Construire soigneusement sur la feuille annexe le point A ; la tangente T_A et la courbe $\mathbf{C_{g^{-1}}}$ de g^{-1} 1

http://mathematiques.kooli.me/

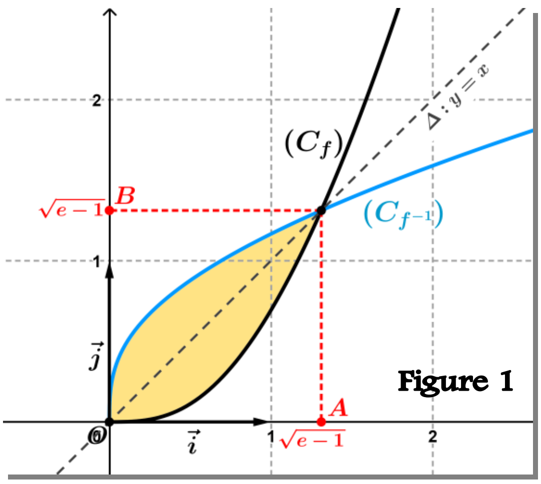

Figure 1

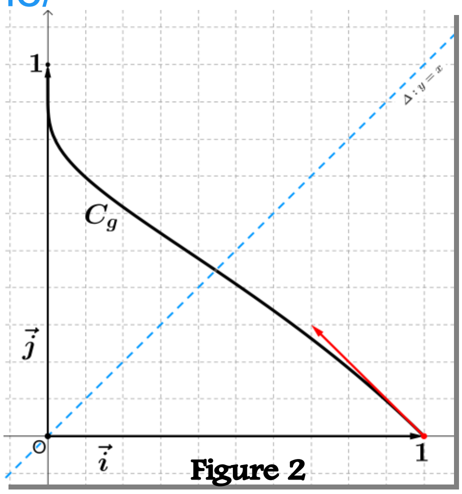

Figure 2

YES WE CAN