DEVOIR DE SYNTHÈSE N° 2 - MATHÉMATIQUES

CLASSE :4ÈME A,S /SECTION : SCIENCES EXPERIMENTALES /DURÉE : 3 HEURES

PROF :BELLASSOUED MOHAMED /ANNÉE SCOLAIRE 2021-2022

BAREME

EXERCICE 1:4 POINTS

En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.
Parmi les 1200 personnes qui ont répondu au sondage, 47% affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.

Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10% des personnes déclarant vouloir voter pour candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour candidat B, tandis que 20% des personnes déclarant vouloir voter pour candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour candidat A

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

- A l'événement : **« La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A »**
- B l'événement : **« La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B »**
- V l'événement : **« La personne interrogée dise la vérité »**

1-Construire un arbre de probabilité traduisant la situation 1

2-a-Calculer la probabilité que La personne interrogée dise la vérité 1

b-Sachant que La personne interrogée dit la vérité, Calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A . (à 10^{-3} prés). 1

3-Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est 0,529 1

EXERCICE 2: 3 POINTS

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E): 3z^3 - 8z^2 + 16z - 8 = 0$$

1-Vérifier que si z est une solution de (E) , alors $\overline{z}$ est aussi solution de (E) 0.25

2-Soit le nombre complexe $z_0 = 1 - \sqrt{3}i$

a-Donner l'écriture exponentielle de z_0 0.25

b-Vérifier que $z_0^3 = -8$ 0.5

3-a-Vérifier que z_0 est une solution de l'équation (E) puis résoudre cette équation 1.25

b-Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E'): 3z^6 - 8z^4 + 16z^2 - 8 = 0$ 0.75

EXERCICE 3: 4 POINTS

On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$

1- Calculer I_0 et I_1 0.75

2-a-Montrer que la suite (I_n) est décroissante 0.5

b-En déduire que la suite (I_n) est convergente 0.5

c- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ 0.5

d- En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$ 0.25

3-On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right) = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} \cdots\cdots\cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

a-A l'aide de la question 2-c ; Montrer que $S_n = I_0 - (-1)^n I_{2n}$ 1

b- En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{\pi}{4}$ 0.5

EXERCICE 4: 9 POINTS

BAREME

On considère les fonctions f et g définies sur $[0;+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\mathrm{Ln}(x^2+1)}{x^2} \text{ si } x \succ 0 \\ f(0)=1 \end{cases} \quad ; \quad g(x)=(x^2+1)\mathrm{Ln}(x^2+1)-x^2$$

1-a- Montrer que f est continue en 0 **0.75**

b-Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat **0.75**

2-a-Soit $t \geq 0$. A l'aide du double inégalité $1-t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$; montrer que : **0.75**

$$\text{Pour tout } x \geq 0 : \quad x-\frac{x^2}{2} \leq \mathrm{Ln}(1+x) \leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

b-En déduire que f est dérivable a droite en 0 et que $f'_d(0)=0$ **0.5**

3-a- Montrer que g est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que $g'(x)=2x\ln(x^2+1)$ **0.75**

b-En déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ **0.5**

4-a- Montrer que pour tout $x \succ 0$ $f'(x)=\dfrac{-2g(x)}{x^3(1+x^2)}$ **0.75**

b- Montrer que f est une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera . **0.25**

On note f^{-1} la fonction réciproque de f et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sa courbe représentative

c- Construire dans le même repère les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ **1**

5- On considère la fonction h définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $h(x)=\tan x$

a-Vérifier que h est une bijection de $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $[0;+\infty[$. Soit h^{-1} la fonction réciproque de h **0.5**

b-Montrer que pour $x \succ 0 : (h^{-1})'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ **0.5**

6-Soit la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_x^1 f(t)dt$

a-À l'aide d'une intégration par parties ; montrer que pour $x \succ 0$: **1.25**

$$\int_x^1 \left(\frac{\mathrm{Ln}(t^2+1)}{t^2}\right) dt = \frac{\mathrm{Ln}(x^2+1)}{x} - 2h^{-1}(x)+\frac{\pi}{2}-\mathrm{Ln}2$$

b-En déduire que $F(0)=\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{Ln}2$. Interpréter géométriquement le résultat **0.75**