LYCEE ELHICHRIA ✧✧✧✧ DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2 MATHÈMATIQUES ✧✧✧✧	SECTION : 4ème Sc
Durée : 3H / Date : 12/03/2025	PROF : Mr Aloui Fethi

NB : Le sujet comporte 4 pages.
La page 4 est une annexe à rendre avec la copie.

Exercice n°1 : (5 points)

(Les valeurs approchées des résultats seront données à 10^{-4} prés)

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayée sur un échantillon d'animaux dont 1% est porteur de la maladie.
On obtient les résultats suivants:

- ✓ Si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85% des cas.
- ✓ Si un animal est sain, le test est négatif dans 95% des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note les événements :
M : « l'animal est porteur de la maladie »
T : « le test est positif»

1) Représenter la situation par un arbre pondéré.
2) Un animal est choisi au hasard.
   a/ Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
   b/ Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est égale à 0,058.

3) Un animal est choisi au hasard parmi ceux dans le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie?
4) On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
   a/ Déterminer la loi de probabilité de X.
   b/ Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?
5) Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 DT et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1000 DT. On suppose que le test est gratuit.
   D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par un animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1000
Probabilité	0,9405	0,0580	0,0015

   a/ Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.
   b/ Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

http://mathematiques.kooli.me/

Exercice n°2: (4 points)

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : . $\begin{cases} U_0 = 2\ln 2 \\ U_{n+1} = \ln(\frac{2}{3}e^{U_n} + 1) \end{cases}$

1) **a/** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n \succ \ln 3$.

b/ Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : . $e^{U_n} - e^{U_{n+1}} = \frac{1}{3}\left(e^{U_n} - 3\right)$

c/ En déduire que la suite (U_n) est décroissante.

d/ Justifier alors que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = e^{U_n} - 3$.

a/ Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$.

b/ Exprimer V_n en fonction de n puis déduire que $U_n = \ln\left(3 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$.

c/ Retrouver la limite de la suite (U_n).

Exercice n°3: (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(1,2,-1) ,B(1,0,1) et C(2,1,-1).

1) a/ Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et déduire que A, B et C ne sont pas alignés.

b/ Déterminer une équation cartésienne du plan P=(ABC).

2) Soit S l'ensemble des points d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 = 10$.

a/ Monter que S est une sphère dont on précisera le rayon et le centre.

b/ Montrer que S et P sont sécants suivant un cercle (C) dont on précisera le rayon et le centre H.

3) Soit Q le plan médiateur du segment [AB] et soit la droite Δ: $\begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$; $\alpha \in IR$

a/ Montrer qu'une équation du plan Q est : y - z - 1 = 0

b/ Vérifier que $\Delta = P \cap Q$.

c/ Déduire que pour tout point M de Δ ona AM =BM.

d/ Montrer qu'il existe deux points du cercle (C) tel que AM =BM dont on déterminera leurs coordonnées.

e/ Déduire qu'il existe un unique point D du cercle (C) tel que ABD soit équilatéral.

4) Soit le point $N(cos\theta + sin\theta\ , -\sqrt{8}\ , cos\theta - sin\theta)$ où $\theta \in [0, \pi]$

a/ Vérifier que N ∈ S.

b/ Montrer que le volume du tétraèdre ABCN égale V = $\frac{1}{3}[\sqrt{8} + 2(1 - cos\theta)]$

c/ Déterminer la valeur de θ pour que le volume V soit maximal.

http://mathematiques.kooli.me/

Exercice n°4 : (6 points)

I. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + xe^{1-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$$

On désigne par C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1) a/ Calculer la limite de f en $+\infty$

b/ Montrer que pour tout réel x, $f(x) = xe^{-x}(\frac{1}{2}xe^x - e^x + e)$

c/ Calculer la limite de f en $-\infty$ puis vérifie que $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus

2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

a/ Calculer la limite de h en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat pour les courbes C_f et C_g

b/ Déterminer le signe de h(x) pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis déduire les postions relatives de C_f et C_g

II.

1) a/ Montrer que $f'(x) = e^{-x}(x-1)(e^x - e)$

b/ Dresser le tableau de variation de f.

2) On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = e^{-x}(e^x + ex - 2e)$

Justifier que le point A$(1, \frac{1}{2})$ est un point d'inflexion de C_f

3) Dans **l'annexe**, on a construit dans le repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C_g et l'unique point d'inflexion A pour la courbe C_f ainsi que la tangente à C_f en ce point

Tracer dans le même repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C_f

4) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_1 = \int_0^1 xe^{1-x}\,dx$ et $u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$

a/ montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq ex^n$.

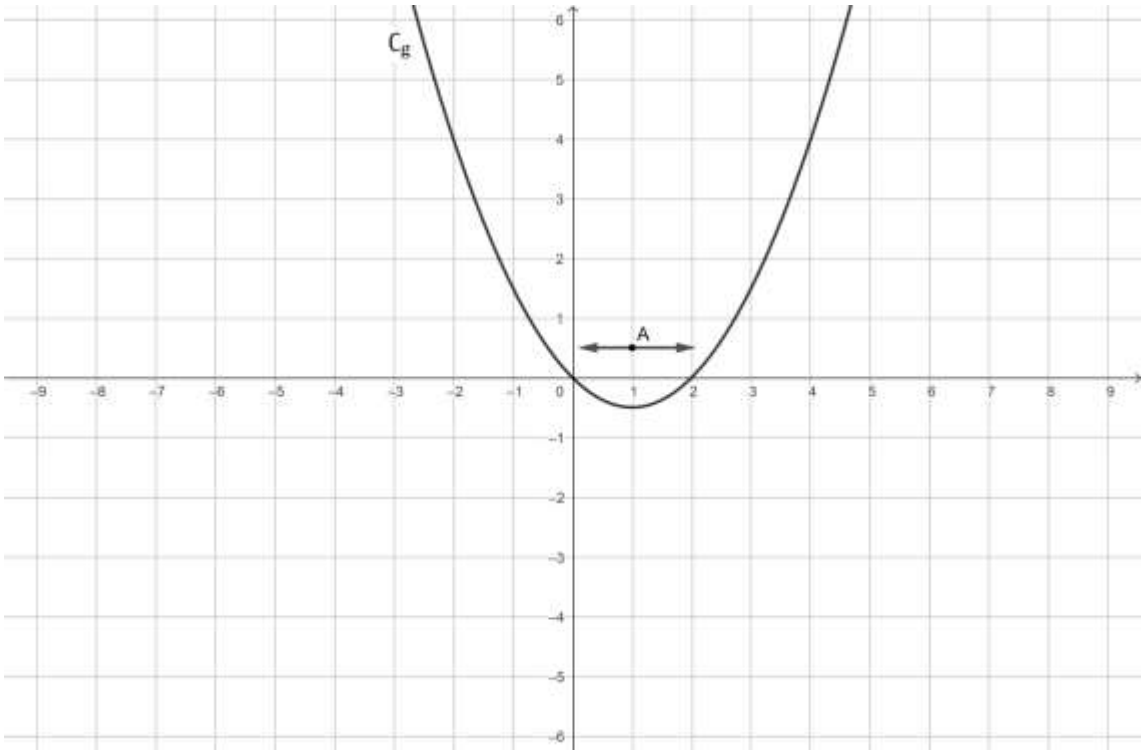
b/ Déduire que $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$ puis calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

c/ Par une intégration par partie; montrer que pour tout n $\in \mathbb{N}^*$ on a: $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$

d/ Montrer que $u_1 = e - 2$ puis déduire la valeur u_2.

5) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f , C_g et les droites d'équation x=0 et x = 1.

Calculer A

Annexe

Nom et prénom: . . . . . Classe : $4^{ème}$ Sc_1