Exercice 1:**(3 points)**

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois propositions est exacte.
Indiquer laquelle, aucune justification n'est demandée.

- 1) Le domaine de définition de la fonction $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$ est :
 $]0, +\infty[$ $]0, e]$ $[e, +\infty[$
- 2) La courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto x - \ln x$ admet :
 La droite d'équation $y = x$ comme asymptote au voisinage de $(+\infty)$.
 Une branche parabolique de direction celle de $(O, \vec{i})$ au voisinage de $(+\infty)$.
 Une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $(+\infty)$.
- 3) La primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $\ln x$ qui prend la valeur (-1) en 1 est :
 $x \ln x - 1$ $x \ln x - x$ $\frac{x}{2} (\ln x)^2 - 1$
- 4) L'ensemble des solutions dans $]0, +\infty[$ de l'équation $2(\ln x)^2 - 3 \ln x + 1 = 0$ est :
 $\{1, e\}$ $\{e, \sqrt{e}\}$ $\{e, \frac{1}{e}\}$

Exercice 2:**(5,5 points)**

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et soit

$$S = \{M(x, y, z) \in \mathcal{E} \text{ tels que } x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0\}$$

- 1) Vérifier que S est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R .
- 2) Soit $\mathcal{P}$ le plan dont une équation cartésienne est : $x + z - 1 = 0$
a/ Calculer la distance du point Ω au plan $\mathcal{P}$.
b/ En déduire que S et $\mathcal{P}$ sont sécants selon un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon r .
- 3) Soit m un paramètre réel appartenant à l'intervalle $[0, 1]$
Soient A , B et N les points de $\mathcal{E}$ tels que :
 $A(0, 0, -1)$; $B(2, 0, -1)$ et $N(1 + m, \sqrt{2m(1 - m)}, -m)$
a/ Montrer que A et B sont diamétralement opposés sur la sphère S .
b/ Calculer $\vec{NA} \cdot \vec{NB}$ et en déduire que $N \in S$.
c/ Vérifier que $N \in \mathcal{P}$
d/ En déduire l'ensemble des points N lorsque m varie dans $[0, 1]$
- 4) a/ Calculer $\vec{AB} \wedge \vec{AN}$
b/ Pour quelle valeur de m les points A , B et N sont alignés ?
c/ Calculer l'aire du triangle ABN pour $m = 0$

Exercice3:**(5,5 points)**

Soit f la fonction définie sur $Df = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a/ Vérifier que $f(x) = 2x - \frac{1}{(x-1)^2}$

b/ Calculer les limites aux bornes de Df .

c/ Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x$ est une asymptote à (C) au voisinage de $(\pm\infty)$

d/ Etudier la position de (C) par rapport à Δ .

2) a/ Montrer que $f'(x) = 2\left(1 + \frac{1}{(x-1)^3}\right)$

b/ Dresser le tableau de variation de f

c/ Tracer (C) et Δ .

3) a/ Déterminer une primitive F de f sur $]1, +\infty[$.

b/ Peut-on affirmer que F est bijective sur $]1, +\infty[$? Justifier.

Exercice4:**(6points)**

A) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x + 1 + \ln x$

1) a/ Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

b/ Etudier les variations de g .

2) a/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α et que

$$0,27 < \alpha < 0,28$$

b/ Déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$

B) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1) a/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b/ Montrer que f est continue à droite en 0.

c/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat./

2) a/ Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$.

b/ Vérifier que $f(\alpha) = -\alpha$

c/ Dresser le tableau de variation de f

3) a/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter le résultat graphiquement.

b/ Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Bon travail et bonne chance