REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ●●○●● Commissariat régionale de l'éducation de kebilli	Epreuve : Mathématiques	
	Section : Sciences Expérimentales	
	Durée : 03 heures	13Mars 2024
	Devoir De synthèse n2	

Exercice 1(4 points)

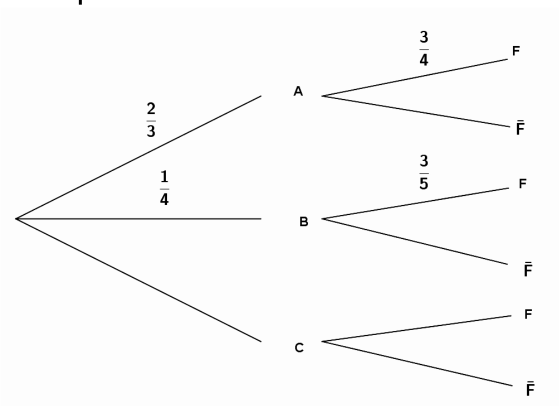
Une association offre à ses adhérents des paniers de légumes .chaque adhérent a le choix entre trois tailles de panier

- Un panier de petite taille
- Un panier de taille moyenne
- Un panier de grande taille

L'association envisage de proposer en outre des livraisons des fruits frais
Pour s'avoir si ses adhérents sont intéressés elle réalise un sondage.
On interroge un adhérent au hasard on considère les évènements suivants :

- A « L'adhérent choisit un panier de petite taille ».
- B « L'adhérent choisit un panier de taille moyenne ».
- C « L'adhérent choisit un panier de grande taille »
- F «L'adhérent est intéressé par une livraisons des fruits frais »

On dispose de certaines données qui sont résumées dans l'arbre ci-dessous :



1) **Dans cette question on ne cherche pas à compléter l'arbre.**

a) Montrer que $p(C)=\dfrac{1}{12}$.

b) Calculer la probabilité que l'adhérent choisit un panier de petite taille et soit intéressé par une livraison des fruits frais.

c) Calculer $p(B\cap F)$.

d) La livraison des fruits frais ne sera mise en place que si la probabilité de l'évènement F est supérieure à 0,6. Justifier que cette livraison sera mise en place.

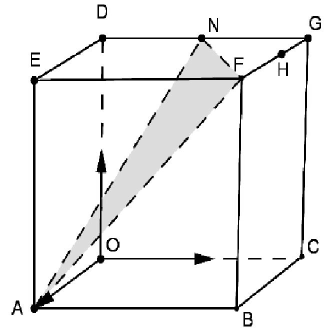
2) **Dans cette question on suppose que** $p(F)=0,675$

a) Montrer que la probabilité que l'adhérent intéressé par une livraison des fruits frais sachant qu'il ait choisi un panier de grande taille est égale à 0,3.

b) l'adhérent interrogé est intéressé par la livraison des fruits frais.
Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un panier de grande taille.

c) On suppose que 135 adhérents intéressés par la livraison des fruits frais.
Déterminer alors le nombre d'adhérents de cette association.

ExErcicE 2 (5 points)



L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.Dans la figure ci-contre OABCDEFG est un parallélépipède rectangle tel que : $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OC} = 2\vec{j}$ et $\overrightarrow{OD} = 2\vec{k}$

Le point N est le milieu du segment $[DG]$.

1) a) Vérifier que N est de coordonnées (0, 1,2) et donner les coordonnées des points A et F.

b) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{AN}$

c) En déduire que les points A, F et N déterminent un plan $P : x - y + z - 1 = 0$.

2) Soit I le point de coordonnées (0, 1,-1).

a) Vérifier que A est le projeté orthogonal du point I sur P.

b) Calculer la distance IA et déduire le volume v du tétraèdre IAFN.

3) Soit (S) l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tel que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z - 2 = 0$

a) Montrer que S est La sphère de centre I et le rayon 2.

b) Montrer que P et (S) se coupent suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4) Soit H un point de la demi-droite $[FG) \setminus \{F\}$, tel que $\overrightarrow{GH} = a\overrightarrow{OA}$ (où a est réel)

a) Vérifier que H est de coordonnées (a, 2,2)

b) Justifier que le point H n'appartient pas au plan P.

c) Calculer en fonction de a le volume v' du tétraèdre HAFN.

d) Déterminer s'il existe des valeurs de a tel que $v = v'$.

Exercice 3 (4,5 points)

Soit (I_n) la suite définie sur IN par :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)}dx \text{ et } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^n(x)}{\cos^2(x)}dx \text{ pour tout } n \in IN^*.$$

1) Calculer I_0 , I_1 et I_2. (On rappelle que $\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$)

2) a) Justifier que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et pour tout $n \in IN^*$, $I_n \geq 0$.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3) a) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et pour tout $n \in IN^*$ on a : $0 \leq \sin^n(x) \leq \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

b) En déduire que $0 \leq \dfrac{\sin^n(x)}{\cos^2(x)} \leq 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

c) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

Exercice 4(6,5 points)

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter les résultats obtenus.

b) Vérifier que pour tout $x\in]0,+\infty[$ on a : $f'(x)=\frac{-1}{x(x+1)^2}$

c) Dresser le tableau des variations de f et déduire le signe de f(x) pour tout $x\in]0,+\infty[$.

d) Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

2) On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$ on a : $g'(x)=f(x)$.

b) En déduire le sens de variation de g sur $]0,+\infty[$

3)Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $h(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$.

a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$ on a : $g(x)=h\left(\frac{1}{x}\right)$

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$.

4) Soit α un réel strictement supérieur à 1. On note $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire (en u a)du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$ l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=1$ et $x=\alpha$

a) En utilisant les résultats de question 2) a), calculer $\mathcal{A}(\alpha)$ en fonction de α.

b) Déterminer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \mathcal{A}(\alpha)$

5) Soit (a_n) la suite définie sur IN* par : $a_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

a) Justifier que $\ln(a_n)=g(n)$

b) En déduire que la suite (a_n) est croissante.

c) Montrer que la suite (a_n) est convergente, et préciser sa limite.

6) Soit (S_n) la suite définie sur IN* par : $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(a_k)}{k}$.

Montrer que pour tout $n\in$IN* on a ; $S_n=h(n)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.