Lycée Said Boubaker Moknine	**Niveau : 4^{éme} sciences expérimentales**
Devoir de synthèse n°2	**Epreuve : Mathématiques**
Prof : Naija Yosra	**Durée : 3h / date: 13/3/2024**

Exercice 1 : 5 points

On considère une pièce de monnaie et une urne contenant 3 boules blanches et 2 boules rouges. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

La pièce de monnaie est truquée de sorte que lorsqu'elle est lancée, la probabilité d'obtenir «face » est le double de la probabilité d'obtenir « pile » .

1) On lance cette pièce de monnaie une fois et on note F l'évènement : « Obtenir face » .
   Montrer que la probabilité de F est $P(F) = \frac{2}{3}$

On considère l'épreuve suivante : On lance cette pièce de monnaie une fois

-Si le coté visible est « face » alors on tire simultanément deux boules de l'urne.

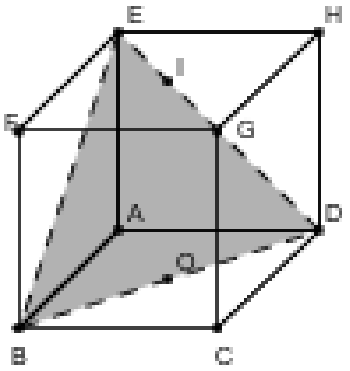
- Si le coté visible est « pile» alors on tire successivement et sans remise deux boules de l'urne.

On note l'évènement suivant : S :« Obtenir une seule boule blanche. »

2) a) Montrer que $p(S/F)=\frac{3}{5}$ et calculer $p(S/\bar{F})$
   b) En déduire $P(S) = 0.6$
   c) Calculer alors $p(F/S)$
   d) Les évènements S et F sont-ils indépendants ?Justifier votre réponse.

3) Calculer la probabilité qu'on obtienne face lors du lancer du dé **ou** on obtienne une seule boule blanche lors du tirage effectué au cours de l'épreuve précédente.

Exercice 2: (5 points)



On considère le cube ci-contre. Les points O et I sont les centres respectifs des carrés $ABCD$ et $EFGH$.

L'espace est muni du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

Pour tout réel α différent de 1, on note $M_\alpha(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \alpha)$.

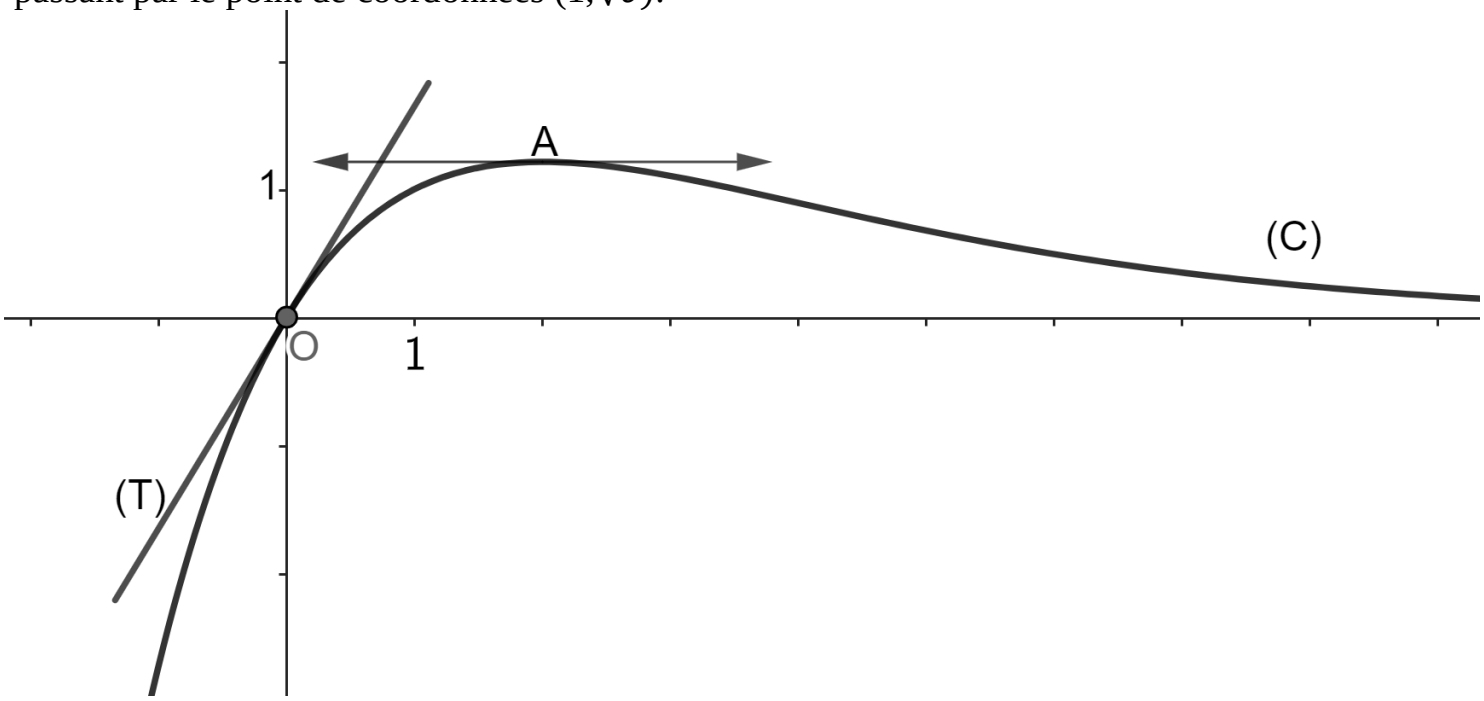
1) a) Montrer que $O(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ et $I(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$
   b) Donner une représentation paramétrique de la droite (AI).
   c) Déterminer l'ensemble des points M_α de l'espace lorsque α décrit $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

2) a) Calculer l'aire du triangle EBD
   b) Montrer qu'une équation du plan (EBD) est : $x + y + z - 1 = 0$
   c) Pour quelle valeur de α , la distance de M_α au plan (EBD) est –elle égale à $\frac{\sqrt{3}}{3}$?
   d) En déduire le volume du tétraèdre $AEBD$

3) a) Donner une équation de la sphère (S) de centre A et de rayon 1
   b) Montrer que la sphère (S) et le plan (EBD) se coupent selon un cercle qu'on déterminera le rayon et les coordonnées de son centre Ω.

Exercice 3: (3.5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
La courbe (C) donnée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.
La courbe (C) admet une branche infinie parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.
L'axe des abscisses est une asymptote à (C).
(C) admet au point $A(2,2\sqrt{e^{-1}})$ une tangente horizontale et au point $O(0,0)$ une tangente (T) passant par le point de coordonnées $(1,\sqrt{e})$.



1) Par lecture graphique et à l'aide des renseignements fournis :
   a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $f'(0)$.
   b) Ecrire une équation de la tangente (T).
   c) Dresser le tableau de variations de f.
2) On admet que pour tout réel x ,$f(x) = x\sqrt{e^{1-x}}$.
   a) Soit $K = \int_0^2 xe^{1-x}\,dx$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $k = e - \frac{3}{e}$.
   b) Calculer le volume du solide engendré par la rotation de l'arc $\widehat{OA}$ de (C) autour de l'axe des abscisses.

Exercice 4 : 6.5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4e^x}{1+e^x}$. On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) a) Vérifier que $f(x) = \frac{4}{1+e^{-x}}$
   b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \frac{4e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.
   c) Dresser le tableau de variations de f.

2) a) Montrer que le point $I(0,2)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
   b) Donner une équation de la tangente T à $(\mathcal{C}_f)$ au point I.

3) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ ainsi que sa tangente T est ses asymptotes.

4) a) Montrer que $\int_0^2 f(x)dx = 4\ \ln(\frac{1+e^2}{2})$

b) En déduire l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C}_f)$ et les droites d'équations respectives : $y = 4$, $x = 0$ et $x = 2$.

5) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$par $u_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} f(x)\ dx$.

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$,$n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $S_n = \int_0^{\ln(n+1)} f(x)\ dx$

b) En déduire que $S_n = 4\ \ln(\frac{n+2}{2})$

c) On note $\mathcal{A}(n)$ l'aire du domaine du plan limité par $(\mathcal{C}_f)$ et les droites d'équations respectives : $y = 4$, $x = 0$ et $x = \ln(n+1)$.

Montrer que $\mathcal{A}(n)$=4 $\ln(\frac{2n+2}{n+2})$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}(n)$.