Epreuve : MATHEMATIQUES	Devoir de synthèse N°2 ************************** Sujet commun	Commissariat régional Tunis 1
12 Mars 2024	Durée : 4 h	Niveau : 4$^{\text{ème}}$ Année ******** Section: MATHEMATIQUES

Le sujet comporte 5 pages dont l'annexe page 5 est à rendre avec la copie.

Exercice N°1: (4 points)

On donne en **annexe (Figure 1)** :

- ABC un triangle rectangle et isocèle tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- ADC un triangle rectangle et isocèle tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- Le point E du segment [BC] tel que :$EB = \sqrt{2}\ EC$

1) Soit f la similitude directe tel que : $f(D) = C \text{ et } f(C) = B$.

a) Montrer que le rapport de f est $\sqrt{2}$ et l'angle de f est $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

b) Montrer que A est le centre de f

2) Soit $F = f(B)$. Montrer que :$AF = 2BC$ et que (BC) et (AF) sont parallèles.

3) On pose $g = foS_{\Delta}$.où Δ est la médiatrice du segment $[AB]$.

a) Montrer que g admet un centre noté Ω.

b) Déterminer : $gog(C)$, puis déduire que C est le milieu du segment [AΩ]

4) On note H le projeté orthogonal de E sur (ΩB).

a) Montrer que : $EC = EH$ puis déduire que (ΩE) est l'axe de g .

b) Montrer que les points Ω, B et F sont alignés

c) Soit $J = g(E)$. Montrer que J est le centre du cercle inscrit dans le triangle ΩAF

Exercice N°2: (5 points)

Pour tout entier naturel n on pose : $\mathrm{F_n} = 2^{2^{\mathrm{n}}} + 1$.

Partie I :

1)a) Montrer que pour tout entier non nul n : $\mathrm{F_n} \equiv 2[\mathrm{mod}\ 3]$

b) En déduire que pour tout entier non nul n : $\mathrm{F_n} + 1 \equiv 0[\mathrm{mod}\ 6]$

2) Soit $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$, et k un entier naturel tel que $0 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{n}$. Montrer que : $\mathrm{F_{n+k}} = (\mathrm{F_n} - 1)^{2^{\mathrm{k}}} + 1$

3)a) Vérifier que $(-4)^{16} \equiv -4[\mathrm{mod}\ 100]$

b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n : $F_{4n+1} \equiv -3[\text{mod } 100]$

c) En déduire les deux derniers chiffres de l'entier naturel $E = \sum_{k=1}^{k=2024} F_{4k+1}$

Partie II :

Soit a un entier naturel pair tel que $a \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $A_n = a^{2^n} + 1$.

Soit p un diviseur premier de A_n

1)a) Montrer que : $a \wedge p = 1$.

b) Soit u l'inverse de a modulo p ; Montrer que: $u^{p-1} \equiv 1[\text{mod } p]$ et $u^{2^n} \equiv -1[\text{mod } p]$

2) Soit $d = 2^{n+1} \wedge (p-1)$

a) Montrer qu'il existe un couple d'entiers (α, β) tel que : $\alpha(p-1) + \beta 2^{n+1} = d$.

b) Montrer que : $\alpha\beta \leq 0$

3) On prend dans la suite $\alpha > 0$ *et* $\beta < 0$

a) Montrer que $u^d \equiv 1[\text{mod} p]$

b) Montrer que si $d < 2^{n+1}$ alors $u^{2^n} \equiv 1[\text{mod } p]$

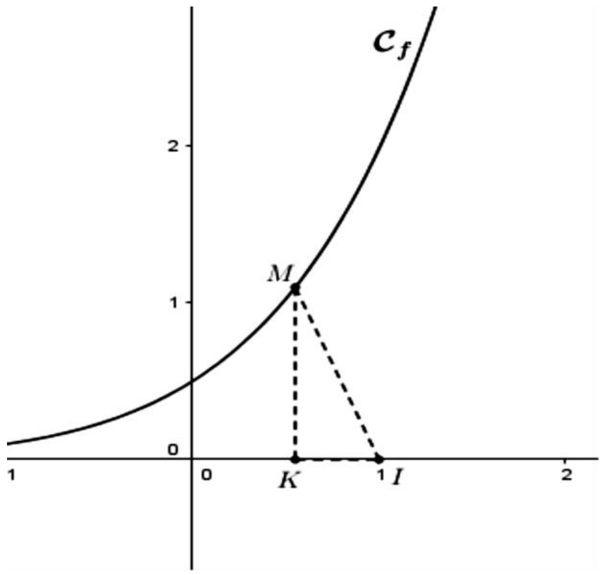
c) Montrer alors que : $p \equiv 1[\text{mod } 2^{n+1}]$

Exercice N°3: (6 points)

Partie A :

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-contre est la représentation de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$



1)a) Montrer que pour tout réel x : $f(x) = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$

b) Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite d'équation $x = 1$ et les axes du repère.

2) Soit I le point de coordonnées $(1,0)$, $M(x, f(x))$ et $K(x,0)$ avec $x\epsilon[0\,,1]$

On désigne par $g(x)$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par les axes du repère, la droite (IM) et la courbe $\mathcal{C}_f$. .

Soit F la fonction définie sur $[0\,,1]$ par : $F(x) = \int_0^{\mathrm{x}} f(\mathrm{t})\mathrm{dt}$

a) Montrer que pour tout $x \in [0\,,1]$: $g(x) = F(x) + \frac{(1-x)f(x)}{2}$

b) Montrer alors, que pour tout $x \in [0\,,1]$: $g'(x) = \frac{f(x)+(1-x)f'(x)}{2}$

3)a) Par des considérations d'aires, montrer que $g(0) \leq \frac{1}{2}\int_0^1 f(\mathrm{t})\mathrm{dt}$.

b) Montrer qu'il existe un unique réel α dans $[0\,,1]$ tel que : $g(\alpha) = \frac{A}{2}$.

Partie B :

Pour tout entier $\mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]-\infty, 0]$, On donne $\mathrm{F_n(x)} = \int_x^0 \frac{\mathrm{e^{nt}}}{1+e^t}\mathrm{dt}$

1) a) Calculer $F_1(x)$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} F_1(x) = \ln(2)$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $F_{n+1}(x) + F_n(x) = \frac{1}{\mathrm{n}}(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{n}x})$

c) Montrer par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} F_n(x)$ est finie.

2) On pose $R_n = \lim\limits_{x\to-\infty} F_n(x)$. Montrer pour tout $n \geq 2$ on a : $R_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$

3) Soit $G_n(x)$= $(-1)^n \int_{\mathrm{x}}^0 \mathrm{e^{nt}}\mathrm{dt}$ pour tout réel $x \leq 0$.

a) Calculer $G_n(x)$ puis montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} G_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$

b) Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a : $\sum_{k=1}^{n} G_k(x) = -F_1(x) + (-1)^n\ F_{n+1}(x)$

4) On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 1$ par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$

Montrer que : $u_n = -\ln(2) + (-1)^n\ R_{n+1}$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice N°4: (5 points)

A/ Soit φ la fonction définie sur $[0\,,1]$ par $\begin{cases} \varphi(\mathrm{x}) = \frac{x-1}{\ln(x)} \text{ si } 0 < x < 1 \\ \varphi(0) = 0 \text{ et } \varphi(1) = 1 \end{cases}$

On désigne par $\mathcal{C}_\varphi$ la courbe représentative de φ dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1)a) Etudier la continuité de φ à gauche en 1

b) Montrer que φ est continue sur $[0\,,1]$

2) Soit Ψ la fonction définie sur $]0{,}1[$ par : $\Psi(x) = \ln(x) - \frac{(x-1)}{x}$.

Etudier les variations de Ψ et en déduire le signe de $\Psi(x)$ pour tout x de $]0{,}1[$

3)a) Pour tout x de]0,1[, étudier le signe de $\varphi'(x)$.

b) Etudier la dérivabilité de φ à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4)a) Montrer que pour tout $x \in\left[0;\frac{1}{2}\right]$ on a : $-2x^2 \leq \frac{1}{x-1} + (x+1) \leq 0$

b) En déduire que pour tout $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$ ona : $-\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1-x) + x \leq -\frac{1}{2}x^2$

c) Montrer alors que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-x)+x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

d) Montrer que φ est dérivable à gauche en 1 et $\varphi'_g(1)$=$\frac{1}{2}$

5)a) Dresser le tableau de variation de φ

b) Tracer la courbe de φ dans le repère donné en **annexe (Figure 2).**

B/ On pose pour tout xϵ $[0;1]$: $g(x) = x\varphi(x)$ et Φ la fonction définie par :

$$\Phi(x) = \int_{\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}^{1} \varphi(\mathrm{t})\mathrm{dt}\,.\,\mathrm{Pour\ x} \geq 0$$

1)a) Montrer que Φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\Phi'(x) = g(e^{(-x)})$

b) Montrer que pour $x \geq 0 : 0 \leq \Phi(x) \leq 1$

2) On considère la fonction G définie sur $[0,+\infty[$ par $G(x) = \int_{\mathrm{e}^{-x}}^{1} \frac{\varphi(\mathrm{t})}{\mathrm{t}}\mathrm{dt}$

a) Montrer que : $g(x) = 2\varphi(x^2) - \varphi(x)$

b) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $G'(x)$

c) Déduire que pour $tout\ x \geq 0$ on a : $\Phi(x) = \int_{\mathrm{e}^{-2x}}^{\mathrm{e}^{-x}} \frac{\varphi(\mathrm{t})}{\mathrm{t}}\mathrm{dt}$

3)a) Montrer pour tout $x \in]0, e^{-1}]$ on a $0 \leq \frac{-1}{\ln(x)} - \varphi(x) \leq x$

b) En déduire que pour tout $x \geq 1$ on a : $0 \leq \ln(2) - \Phi(x) \leq e^{-x}$

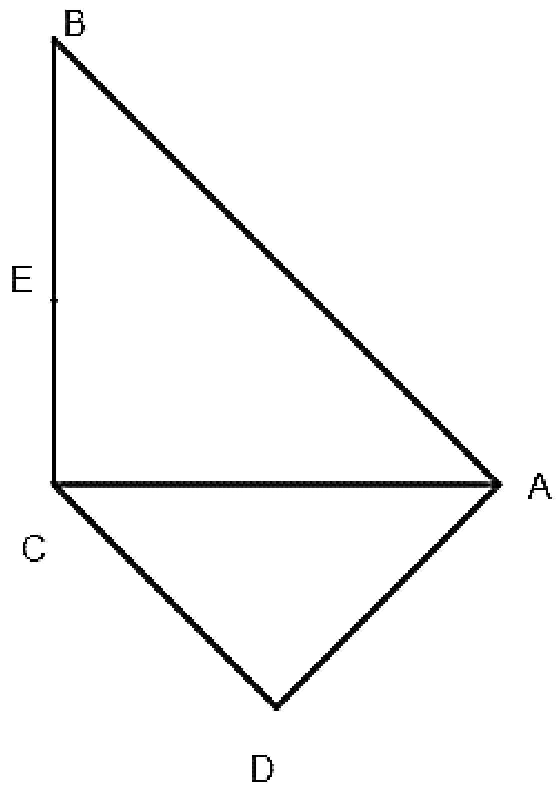
4) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $0 \leq \int_0^{\mathrm{e}^{-x}} \varphi(\mathrm{t})\mathrm{dt} \leq e^{-x}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^{\mathrm{e}^{-x}} \varphi(\mathrm{t})\mathrm{dt} = 0$

b) En déduire la valeur de $\int_0^1 \varphi(\mathrm{t})\mathrm{dt}$.

Annexe à rendre avec la copie
Nom .... Prénom …………........ .... Classe : .... N°.......

<u>Exercice N°1 :</u>

Figure 1



<u>Exercice N°4 :</u>

Figure 2