Délégation Régionale de Sousse	**DEVOIR DE SYNTHESE N°2**	**Niveau** : 4 Math **Date** : 12 – 03 – 2024
Année Scolaire : 2023/2024	Mathématiques	**Durée** : 4 heures

EXERCICE 1 (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1,0,1)$, $B(2,0,0)$ et $C(0,1,1)$.

1) a) Donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

En déduire que les points A, B et C déterminent un plan P.

b) Montrer qu'une équation cartésienne de P est: $x + y + z - 2 = 0$.

c) Soit le point $I(3,1,0)$. Vérifier que IABC est un tétraèdre et calculer son volume .

2) Soit h l'homothétie de centre I et de rapport -2 .

a) Donner l'expression analytique de h .

b) On pose $h(A) = A'$. Déterminer les coordonnées du point A' .

En déduire une équation cartésienne du plan P' image du plan P par h.

c) La droite (IB) perce le plan P' en un point B'. Montrer que $h(B) = B'$.

d) La droite (IC) coupe le plan P' en un point C' , déterminer le volume du tétraèdre $IA'B'C'$.

3) Existe-t-il un point M de P' tel que le triangle MBC soit rectangle en M ?

EXERCICE 2 (6 points)

Le plan est orienté.

Dans la feuille annexe, ABC est un triangle direct et rectangle en C tel que $AB = \sqrt{5}\,AC$

1) Soit f la similitude directe de centre C et qui envoie A en B.

Montrer que f est de rapport 2 et déterminer une mesure de son angle.

2) Soit D le point tel que ACBD soit un parallelogramme.

La droite perpendiculaire à (DC) passant par C coupe la droite (BD)en un point P

a) Vérifier que D appartient au cercle Γ circonscrit au triangle ABC .

b) Déterminer l'image de la droite (AD) par f .

c) Montrer que $f(D) = P$.

3) Soit H le milieu du segment [BC] . La droite (AH)coupe la droite (BD)en un point L .

a) Montrer que B est le milieu du segment [DL]

b) Montrer que B est le barycentre des points pondérés $(P, 1)$et $(L, -4)$.

4) Soit g la similitude indirecte telle que $g(C) = P$ et $g(L) = C$.

a)Vérifier que le rapport de g est égal à 2 .

b) Montrer que B est le centre de g .

c) Construire l'axe Δ de g et montrer que Δ coupe la droite (AH) en un point K de Γ.

d) Soit K' l'image de K par f .Montrer que le triangle CPK' est rectangle en K'.

5) On pose $S = f^{-1} o\, g$.

a) Déterminer $S(B)$ et $S(L)$.

b) Montrer que S est une symétrie glissante d'axe la médiatrice du segment [BC] puis déterminer son vecteur.

c) Soient Met N deux points du plan tel que $g(M) = f(N)$ .Déterminer l'ensemble des points M pour que ANMC soit un parallélogramme.

EXERCICE 3 (4 points)

1)a) Résoudre, dans $\mathbb{Z}$, chacune des équations suivantes :

E: $x^2 \equiv 1 \pmod 5$.

E': $x^2 + 2x \equiv 3 \pmod 5$.

b) En déduire les solutions, dans $\mathbb{Z}$, du système (S) suivant : $\begin{cases} x^2 \equiv 1 \pmod 5 \\ x^2 + 2x \equiv 3 \pmod 5 \end{cases}$

2) a) Déterminer le reste modulo 5 de chacun des entiers 2023 et 2024 , en déduire que :

$$2023^{2n} \equiv (-1)^n \pmod 5 \text{ et } 2024^n \equiv (-1)^n \pmod 5.$$

b) Montrer alors que l'entier naturel $(2023^2.2024)^n$ est une solution de S.

c) Vérifier que : $2023^4 \equiv 1 \pmod 5$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $N = 2023^{4n} + 2023^{4n+1} + 2023^{4n+2} + 2023^{4n+3}$.

Montrer que N est divisible par 5 et déterminer son chiffre d'unité.

EXERCICE 4 (6 points)

Soit la fonction f définie sur $[0,1[$ par : $f(x) = 1 - \ln(1 - x^2)$

et (C)sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 4cm)

1)a)Montrer que f est dérivable sur $[0,1[$ et calculer $f'(x)$.

b)Dresser le tableau de variation de f.

c)Tracer la courbe (C).

2) Soient F et G les foncions définies sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par:

$$F(x) = \int_0^x \cos(t).\ln(\cos t)\,dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^{\sin x} \ln(1 - t^2)dt$$

a)Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et que : $G'(x) = 2\cos(x).\ln(\cos x)$.

b)En déduire que pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$; $G(x) = 2F(x)$.

3)a) A l'aide d'une intégration par partie , montrer que pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$:

$$F(x) = \sin(x)\,(\ln(\cos x)) - \sin(x) + \int_0^x \frac{1}{\cos t}\,dt\,.$$

b)Montrer que pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$: $F(x) = \sin(x)\,(\ln(\cos x)) - \sin(x) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)$.

4)Calculer l'aire de la partie du plan limitée par : la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives: $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$.

5)Pour tout entier naturel $n \geq 2$ et pour tout réel $x \in [0\,,1[$, on pose :

$$P_n(x) = \frac{2^{n-1}}{n+1} \times \frac{\left(\sqrt{f(x)}-1\right)\left(\sqrt[3]{f(x)}-1\right)\cdots\left(\sqrt[n]{f(x)}-1\right)}{x^{2(n-1)}} \quad \text{et} \quad L_n = \lim_{x\to 0^+} P_n(x).$$

a)Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-1}{x^2} = 1$

b)Montrer que pour tout entier naturel $k \geq 2$: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[k]{f(x)}-1}{x^2} = \frac{1}{k}$

c)Montrer alors que : $L_n = \frac{2^{n-1}}{(n+1)\,n!}$

d)Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$ on a : $2^{n-1} \leq n!$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to +\infty} L_n$.

Nom et prénom : . . . .

Annexe à rendre

Exercice 2