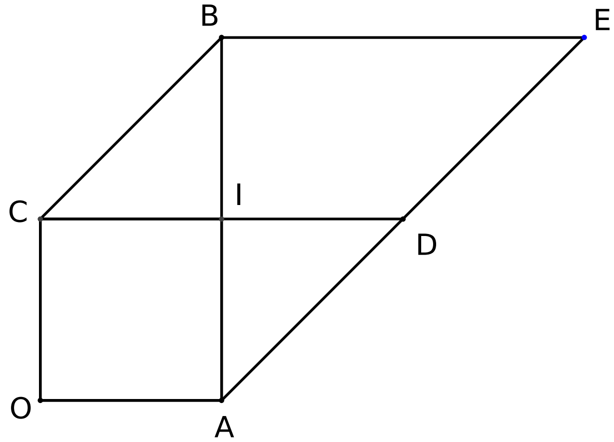
4ème Maths ❄ **Devoir de Synthèse 2** ❄ **Durée : 4 h** ❄

Profs : ✍ Selmi.M ✍ Khaled.B ✍ Zrafi.K ✍ Mbarki.J ✍
✍ Haj Salem.H ✍ Harabi.A ✍Haj Rhouma A. ✍

Dream big, work hard, make it happen.

Exercice 1 (5 points)

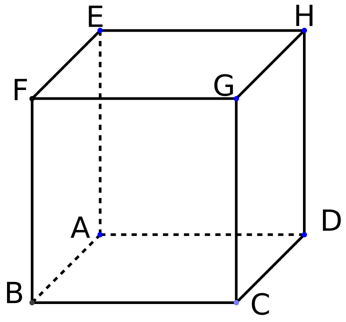
Le plan est orienté dans le sens direct, on considère un carré direct OAIC.
On désigne par B et D les symétriques respectives de A et C par rapport à I .
E est le point tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$.



1. Soit S la similitude directe qui transforme O en C et C en B.
   a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S.
   b) Montrer que $S(I) = D$.
   c) Montrer que A est le centre de S.
2. Montrer que $S(B) = E$.
3. Le plan est rapporté au repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$. Donner l'écriture complexe de la similitude S.
4. On considère la suite des points (M_n) définie par : $\begin{cases} M_0 = O \\ M_{n+1} = S(M_n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = 1-(1-i)^n$.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le triangle AM_nM_{n+1} est rectangle et isocèle en M_n.
   c) Construire alors sur l'annexe à rendre , les points M_4 et M_5.
   d) Déterminer l'ensemble des entiers n pour que $M_n \in (AB)$.
5. Soit la similitude indirecte tell que $\sigma(B) = C$ et $\sigma(C) = O$.
   a) Déterminer le rapport de σ.
   b) Construire $A' = \sigma(A)$.
   c) Soit J le centre de σ, montrer que J est symétrique de B par rapport à O , puis construire l'axe Δ de σ.
   d) Déterminer l'ensemble des points M du plan $\sigma(M) = S^{-1}(M)$.

Exercice 2 (4 points)

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube d'arête 1 .
On munie l'espace du repère orthonormé direct ($A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$).



1. a) Calculer $\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BE}$ et déduire l'aire du triangle BDE.

   b) Montrer que $x+y+z-1=0$ est une équation du plan (BDE) .

   c) Prouver que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (BDE) en un point K dont on déterminera les coordonnées.

   d) En déduire que si x, y, et z sont trois réels tels que $x+y+z-1=0$, alors $x^2+y^2+z^2 \geq \dfrac{1}{3}$

2. Soit S_α la sphère de centre A et de rayon $\alpha > 0$.

   Montrer que S_α est tangente au plan (BDE) si et seulement si $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

3. On désigne par S_1 la sphère de centre A et de rayon 1 .

   a) Vérifier que B, D et E sont trois points de S_1.

   b) En déduire le centre du triangle BDE et déterminer le rayon de son cercle circonscrit.

4. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{3}$.

   a) Donner l'expression analytique de h.

   b) Vérifier que $h\left(S_{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right) = S_1$.

   c) Donner une équation cartésienne d'un plan P parallèle au plan (BDE) et tangent à S_1.

Exercice 3 (4 points)

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = n.5^n + (n+1).5^{n+1} + (n+2).5^{n+2}$.

1. a) Déterminer suivant n , le reste modulo 31 de 5^n.

   b) En déduire le reste modulo 31 de U_{2024}.

2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n \equiv 11.5^{n+1} \pmod{31}$.

   b) En déduire suivant les valeurs n , les restes de U_n modulo 31.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$.

   a) Montrer que $4S_n \equiv 55\left(5^{n+1}-1\right) \pmod{31}$.

   b) En déduire que $S_n \equiv 6\left(5^{n+1}-1\right) \pmod{31}$.

   c) Déterminer alors, le reste modulo 31 de S_{2024}.

Exercice 4 **(7 points)**

A) Soit f la fonction définie sur $]0,1]$ par $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\ln x$.
On note $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

   b) Montrer que $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)}{x-1}=-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

2. a) Montrer que pour tout $x\in]0,1[$, $f'(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-x^2}{x\sqrt{1-x^2}}$.

   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $x^2+x-1=0$.

   c) Dresser le tableau de variation de f .

3. Dans la figure de l'annexe jointe

   - $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$est un repère orthonormé .
   - $(\mathscr{C}_1)$ et$(\mathscr{C}_2)$ sont les courbes des fonctions, respectives, $x\mapsto x^2$ et $x\mapsto \ln(x)$.
   - la courbe Γ est celle de la fonction F, primitive sur $]0,1]$, de f qui s'annule en 1.
   - Au point M, la courbe Γ, possède une tangente horizontale ;
   - Le point P est un point d'inflexion de la courbe Γ ;
   - Au point Q, la courbe Γ, possède une demi-tangente horizontale.

   a) En s'aidant de la courbe Γ, donner un procédé de construction et construire :
      - les points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C}_f)$avec l'axe des abscisses.
      - le point $A\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}, 0\right)$.

   b) Montrer que $f'(x)=0$ si et seulement si $f(x)=\ln x+x^2$.

   c) La droite passant par le point P et perpendiculaire à l'axe des abscisses coupe la courbe $(\mathscr{C}_1)$ en E , l'axe des abscisses en A et la courbe $(\mathscr{C}_2)$ en F.
   Montrer que $f\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)=AE-AF$.

   d) Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

4. On pose pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $g(x)=\sin(x)$.

   a) Montrer que la fonction g est une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]sur[0,1]$.
   On note g^{-1} sa fonction réciproque.

   b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0,1[$ et que pour tout $x\in[0,1[$, $\left(g^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. On pose, pour tout $x \in]0,1]$, $G(x) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + g^{-1}(x)\right) + x\ln x - x + 1 - \frac{\pi}{4}$.
   - a) Montrer que G est dérivable sur $]0,1[$ et que pour tout $x \in]0,1[$, $G'(x) = f(x)$.
   - b) En déduire que pour tout $x \in]0,1]$, $\int_1^x f(t)dt = G(x)$.
   - c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x = 1$.

B) On pose pour tout entier naturel non nul n, $I_n = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln^n(t)dt$ et $J_n = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n dt$.

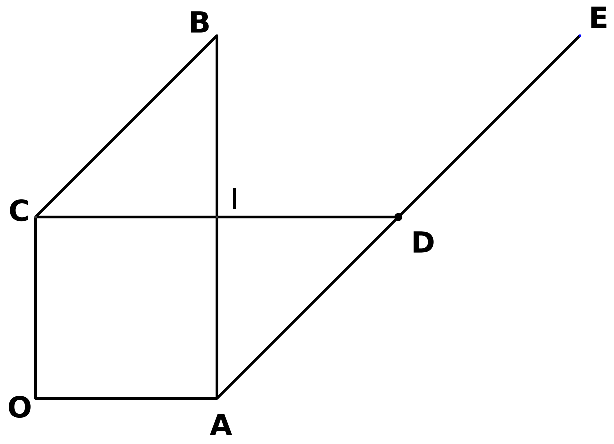
1. On pose pour tout réel $x \in \left]\frac{1}{e}, 1\right]$, $G_n(x) = (-1)^n n!.x. \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \ln^k(x)$.
   - a) Vérifier que $G_{n+1}(x) = x\ln^{n+1}(x) - (n+1)G_n(x)$.
   - b) Montrer, par récurrence, que la fonction G_n est une primitive sur $\left]\frac{1}{e}, 1\right]$, de la fonction $x \mapsto \ln^n(x)$.
   - c) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $I_n = \frac{(-1)^n n!}{e} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
2.
   - a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $J_n = \frac{2n}{2n+1} J_{n-1}$.
   - b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $J_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

BON TRAVAIL

ANNEXE A RENDRE

Nom et prénom :..
Classe et Numéro.............

Exercice 1 :



Exercice 4 :