Prof : Dhahbi . A Lycée cité Ibn khaldoun		Devoir de synthèse n°2 Mathématiques	
Coefficient : 4	Classe : 4^{eme} Maths	Mardi 12-03-2024	4Heures

N.B : Le sujet comporte 3 pages : de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est rendre avec la copie

Croyez en vos rêves et il se réaliseront peut-être. Croyez en vous et ils se réaliseront surement.
Martin Luther king

EXERCICE N°1: (5,5points)

Dans la figure de **l'annexe ci-jointe page 4**, ABCD est un parallélogramme de centre G et ACDE est un rectangle directe de centre O tel que tel que tel que : $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soit F le milieu de segment [OC]

1°/ Soit S la similitude directe qui transforme O en B et D en E.

a) Montrer que S est de rapport 2 est d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b) Montrer que C est le centre de S.

2°/ Soit le point I barycentre des points pondérés (E,2) et (C,1).

J est le projeté orthogonal de I sur (AE) et S' la similitude directe qui transforme J en I et A en C.

Déterminer le rapport et l'angle de S'.

3°/ Caractériser $\varphi = S^{-1}oS'$.

4°/ Soit la similitude directe $f = R_{(O,-\frac{\pi}{3})}oS^{-1}$ et Ω son centre.

a) Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre [BE].

b) Déduire une construction de Ω.

5°/ a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme A en E et D en B.

b) Montrer g est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

6°/ Soit $\sigma = fog$.

a) Montrer que σ est une similitude indirecte.

b) Soit W le centre de σ et on désigne par K le milieu de segment [BC].

Montrer que w est le centre de gravité du triangle OKC.

c) Déduire une construction de Δ axe de σ.

7°/ Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(A,\overrightarrow{AC},\sqrt{3}\overrightarrow{AE})$.

a) Donner la forme complexe associé à σ.

b) Préciser une équation de Δ.

Voir verso ☞

EXERCICE N°2 : (5 points)

Partie A :

1°/ Discuter suivants les valeurs de l'entier naturel n le reste modulo 10 de 9^n.

2°/ Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $9^n \equiv 5^n + 4^n \pmod{10}$.

3°/ En déduire le chiffre des unités de l'entier $A = 2025^{2023} + 2024^{2023}$.

On se propose de résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E) : $5^x - 4^x = y^2$.

Partie B :

1°/ Vérifier que (0, 0) et (1, 1) sont solutions de l'équation (E).

Dans la suite du problème, on prend x un entier naturel strictement supérieur à 1.

2°/ L'objet de cette question est de démontrer que x est pair.

a) Quels sont les entiers naturel n tels que $n^2 \equiv 5 \pmod 8$.

b) Démontrer que, si x est impair, alors $5^x - 4^x \equiv 5 \pmod 8$.

En déduire que si (x, y) est une solution de (E) alors x est pair.

3°/ Soit x = 2m avec $m \in \mathbb{N}^*$.

a) Démontrer que l'équation (E) est équivalent à $(5^m - y)(5^m + y) = 2^{4m}$.

b) En déduire qu'il existe deux entiers p et q tels que :

$5^m - y = 2^p$ et $5^m + y = 2^q$ avec p + q = 4m.

c) Vérifier que y est impair.

d) Montrer alors que p = 1, q = 4m – 1 et $5^m = 1 + 4^{2m-1}$.

e) En déduire que m = 1(On pourra raisonner par l'absurde).

4°/ Déterminer alors l'ensemble des solutions de l'équation (E)

EXERCICE N°3 : (3,5 points)

On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1 représenté ci-contre:

et on munit l'espace du repère orthonormé direct $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

1°/ Donner une représentation paramétrique de la droite (FD).

2°/ a) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{BG} \wedge \overrightarrow{BE}$.

b) En déduire que le plan P = (BEG) à pour équation x – y + z – 1 = 0.

c) Montrer que la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BEG)

en un point K de coordonnées $K(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

3°/ On désigne par S la sphère de centre Ω $(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3-\sqrt{3}}{3})$ et de rayon R = $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$.

a) Vérifier que Ω ∈ (FD). Montrer que S et P sont tangents au point K.

b) On admet que les plans (ABD), (ADE) et (CDH) ont respectivement pour équations z = 0, x = 0 et y =1. Montrer que S est aussi tangente aux trois plans (ABD), (ADE) et (CDH).

4°/ Soit h l'homothétie de centre K tel que h(D) = F.

a) Déterminer le rapport de h.

b) On pose h(S) = S'. Montrer que S'est tangent aux quatre plans (BEG), (EFH), (BCF) et(ABE).

Voir verso ☞

EXERCICE N°4 : (6 points)

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}, 0]$ par : $f(x) = -\ln(1+\sin(x))$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/ Dresser le tableau de variation de la fonction f.
2°/ Tracer la courbe représentative (C)
3°/ Montrer que f admet une fonction réciproque φ définie sur $[0,+\infty[$.
4°/ Montrer que φ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout $x \succ 0$, on a $\varphi'(x) = \frac{-1}{\sqrt{2e^x - 1}}$.

Partie B :

Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{-1}{\sqrt{2e^x - 1}}$

Pour tout $n \in IN^*$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose : $G_n(x) = \int_0^x (g(t))^n dt$.

1°/ a) Calculer $G_1(x)$ en fonction de $\varphi(x)$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} G_1(x) = -\frac{\pi}{2}$.

b) Pour tout $t \succ 0$, on pose $K(t) = \ln(2 - e^{-t})$. Montrer que $K'(t) = g^2(t)$.

c) Calculer alors $G_2(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} G_2(x)$.

2°/ a) Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a : $2e^t - 1 \geq e^t$.

b) Prouver que pour tout $t \geq 0$, on a : $-e^{-\frac{t}{2}} \leq g(t) \leq 0$.

c) En déduire que pour tout $n \in IN^*$ et pour $x \in [0, +\infty[$, on a : $|G_n(x)| \leq \frac{2}{n}$.

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x)$.

3°/ a) Vérifier que pour tout réel $t \geq 0$, $g(t) + [g(t)]^3 = -2g'(t)$.

b) En déduire que pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout $n \in IN^*$, $G_n(x) + G_{n+2}(x) = -\frac{2}{n}[(g(x))^n - (-1)^n]$.

4°/ pour tout $n \in IN^*$, On pose : $U_n = G_n(\ln(\frac{5}{2})$ et $V_n = (-1)^n U_{2n}$.

a) Calculer U_2.

b) Vérifier que : $U_{n+2} + U_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}(\frac{1}{2^n} - 1)$

c) Déduire que : $V_{n+1} - V_n = \frac{(-1)^n(1-4^n)}{n.4^n}$.

d) Prouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{3}{4} - \frac{15}{32} + ... + \frac{(-1)^n(1-4^n)}{n.4^n}$.

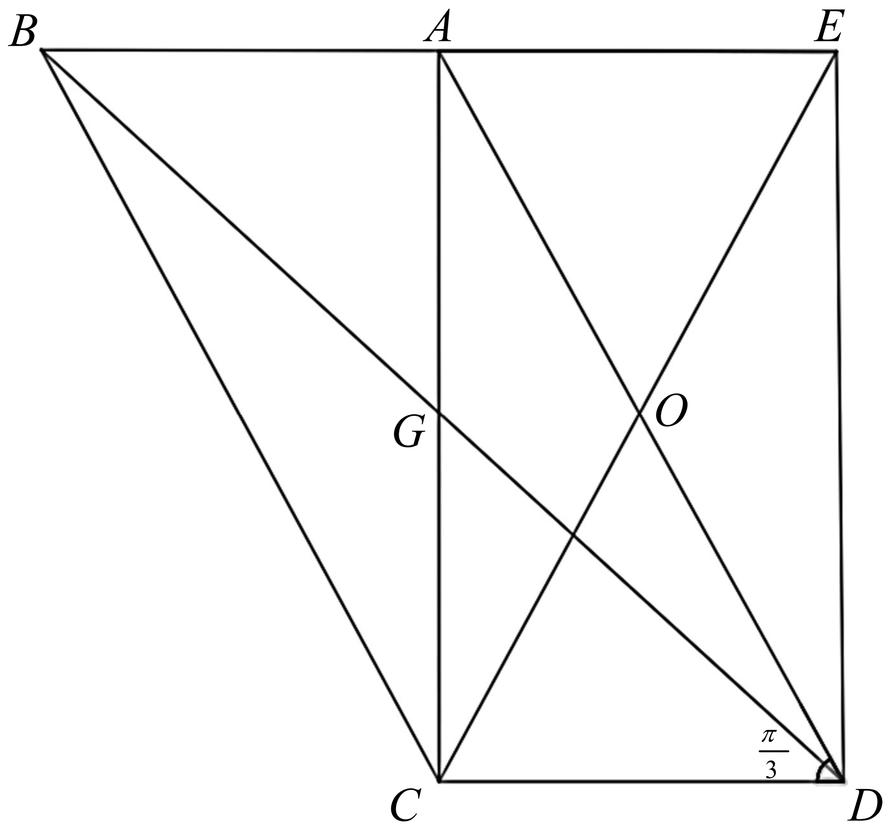
Bonne Réflexion

Nom et Prénom :…………………………………. *Classe :…………….*

Epreuve : mathématiques - Section : Mathématiques

Devoir de synthèse N°2:

Annexe à rendre avec la copie



Croyez en vos rêves et il se réaliseront peut-être. Croyez en vous et ils se réaliseront surement.
Martin Luther king

Bonne Réflexion