L.P.Ibn Khaldoun Kairouan	Devoir de synthèse N°2	Prof : Chouihi
Le : 12 / 03 /2024	Durée : 4heures	Classe : 4M

Exercice N°1 (7 points)

Partie I.

Soit h la fonction définie sur]-1,1[par $h(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$

1/ Montrer que h est impaire

2/ a/Montrer que h est dérivable sur]-1,1[et calculer h'(x)

b/ Donner le tableau de variation de h.

c/ Donner une équation de la tangente (T) à C_h au point d'abscisse 0.

d/ Etudier la position relative de C_h et (T).

3/ a/ Montrer que h admet une fonction réciproque notée h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b/ Expliciter $h^{-1}(x)$ pour $x\in J$.

c/ Construire C_h et $C_{h^{-1}}$ dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Partie II.

Soient la fonction g définie sur IR par $g(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ et f la fonction définie par : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{2x}{x+g(x)} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

1/ Justifier que f est définie sur IR, puis montrer que f est paire.

2/ Montrer que f est continue sur IR.

3/ a/ Vérifier que pour tout $x\in IR$, $g'(x) = 1 - (g(x))^2$

b/ En déduire que pour tout $x\in IR_+$, $x - \frac{x^3}{3} \leq g(x) \leq x$

4/ a/ Vérifier que pour tout $x > 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{(x-g(x))}{2x^2}.f(x)$

b/ En déduire que f est dérivable en 0 et préciser f'(0).

5/ a/ Montrer que f est dérivable en tout point de IR* et que pour tout $x\in IR^*$, $f'(x) = \frac{2(g(x)-xg'(x))}{(x+g(x))^2}$

b/ Montrer que f est strictement croissante sur IR_+ (on peux étudier le sens de variation de la fonction ψ définie par $\psi(x) = g(x) - xg(x)$) et que $f([0,+\infty[) = [1,2[$

c/ Construire C_f (dans un autre repère)

6/ Soit φ la fonction définie sur IR_+ par $\varphi(t) = t - g(t)$

a/ Montrer que pour tout $t\in IR_+$, $0 \leq \varphi'(t) \leq t^2$

b/ En déduire que pour tout $x\in IR_+$, $0 \leq \varphi(x) \leq \frac{x^3}{3}$

Partie III.

Soit V la suite définie sur IN par $V_0 = \frac{1}{2}$ et $V_{n+1}= \varphi(V_n)$

1/ a/ Montrer que pour tout $n\in IN$, $0 < V_{n+1} < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}V_n$

b/ Déduire que la suite V est convergente et préciser sa limite.

2/ Pour tout $n\in IN^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n}g(\frac{1}{n+k})$

Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $S_n - \frac{1}{3n^2} \leq T_n \leq S_n$

3/ a/ Montrer que pour tout $t\in]-1,1[$, $\ln(1+t) \leq t \leq -\ln(1-t)$

b/ En déduire que pour tout $n\in IN^*$, $\ln(2 - \frac{1}{n+1}) \leq S_n \leq \ln(2)$

c/ Montrer que (S_n) et (T_n) sont convergentes et précsier la limite de chacune.

Exercice N°2 (4 points)

NB : Les questions 1/ ; 2/ ; 3/ et 4/ de cet exercice sont indépendantes !

1/ On se propose de résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E) : $3^x + y^2 = 65$

a/ Déterminer, suivant les valeurs de l'entier y, les restes modulo 9 de y^2 .

b/ En déduire que pour $x \geq 2$, l'équation (E) n'a pas de solution.

c/ Achever la résolution de l'équation (E).

2/ Résoudre dans Z: $\begin{cases} 2x \equiv 7 \pmod 5 \\ 3x \equiv 5 \pmod{13} \end{cases}$

3/ Résoudre dans Z l'équation: $33x \equiv 1 \pmod{55}$

4/ a/ Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, les restes modulo 13 de 5^n.

b/ Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, les restes modulo 13 de 4^n.

c/ En déduire l'ensemble des entiers naturels n pour les quels $4^n + 5^n$ est divisible par 13.

Exercice N°3 (6 points)

Soit ABC un triangle équilatéral direct de côté 2. I, J et K les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB]. On note $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et $D = S_B(A)$.

1/ a/ Montrer qu'il existe une rotation unique R qui transforme C en B et J en K.

b/ Carctériser R.

2/Soit S la similitude directe qui envoie A sur B et C sur I

a/ Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S

b/ Soit Ω le centre de S. Montrer que $\Omega \in \mathscr{C}$ et que Ω, A et I sont alignés. Construire Ω.

3/ Soit $h = SoR$. Caractériser h.

4/ Soit M un point de $\mathscr{C}$ distinct de Ω et A. On pose $M_1 = S(M)$ et $M_2 = R(M)$

a/ Déterminer la nature de ΩMM_1

b/ Montrer que la droite (MM_1) passe par un point fixe que l'on précisera.

c/ Montrer que les points M, M_1 et M_2 sont alignés.

5/ On rapporte le plan au repère orthonormé direct $(K, \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{KB}$.

On note f la transformation du plan qui à tout point M(z) associe le point M'(z') telle que $z' = \frac{-1}{2}\bar{z} + \frac{1}{2}$

a/ Montrer que l'écriture complexe associée à S est $z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{5+i\sqrt{3}}{4}$

b/ Montrer que f est une similitude indirecte dont on précisera le rapport, l'affixe du centre ω et une équation de l'axe.

c/ Montrer que $f = SoS_{(AC)}$

d/ En déduire l'écriture complexe associée à $S_{(AC)}$

Exercice N°4 (3 points)

1/ Calculer l'intégrale : $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^3+|x|+1}{x^2+2|x|+1} dx$

2/ Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$. Montrer que $I_{n+1} = \frac{(2n-1)}{2n} I_n + \frac{1}{n.2^{n+1}}$

3/ On pose $f(x) = (x+1)\ln(\frac{2x+3}{5x+1}) + \ln(3x+2)$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$