4 Maths **DEVOIR DE SYNTHESE N°2** **12/03/2024**

L.Sayada **EPREUVE DE MATHEMATIQUES** **Durée 4 heures**

Exercice 1 (5,5 points)

1) On donne l'équation (E) : 11x - 8y=1.

a) Vérifier que l'équation (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$.

b) Déterminer une solution de (E) puis la résoudre dans $\mathbb{Z}^2$.

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation $8u \equiv 1(mod\ 11)$ puis déduire la valeur de u comprise entre 0 et 10.

2) Soit les systèmes (S) : $\begin{cases}(n-2)^{45} \equiv 2(mod\ 23)\\ 8\ (n-2)^{21} \equiv 5(mod\ 11)\end{cases}$ *et (S') :* $\begin{cases}(n-2)^{45} \equiv 2(mod\ 23)\\ 8\ (n-2)^{21} \equiv 5(mod\ 11)\\ 11n-4 \equiv 0(mod\ 8)\end{cases}$

a) Montrer que n est une solution de (S) ⇔ n ≡ $4(mod\ 253)$.

b) Montrer que n est une solution de (S') ⇔ n ≡ $4(mod\ 2024)$.

c) Résoudre alors, dans $\mathbb{Z}$, les systèmes (S) et (S').

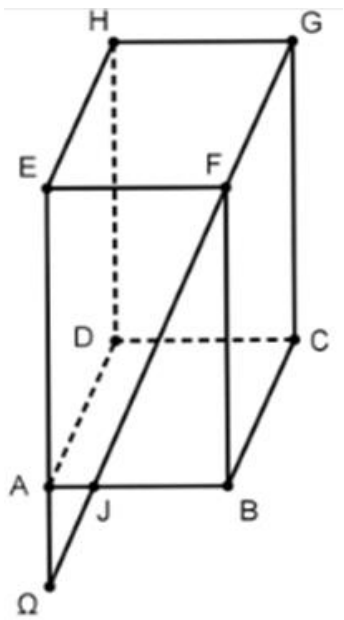
3) Dans la suite n est une solution de (S'), p ϵ IN et* $A_p(n)=\sum_{k=0}^{p}(n-2)^k$.

a) Montrer que $(n-3)\ A_p(n) = (n-2)^{p+1} - 1$.

b) Montrer que [$A_{44}(n) - 1$] et [$A_{20}(n) - 1$] sont divisibles respectivement par 23 et 11. En déduire que le double de leur produit est divisible par 2024.

Exercice 2(4 points)

Dans la figure, ci-contre, ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que AB=AD=1, AE=2, K est le milieu de [AE], J est le point de [AB] vérifiant $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\ \overrightarrow{AB}$, $\Omega \in$ (AE)∩(JF) et (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AK}$) est un repère orthonormé de l'espace. On désigne par h l'homothétie de centre Ω qui transforme J en F.



1) a) Montrer que h(A)=E, déterminer le rapport de h et les coordonnées de son centre Ω.

b) En déduire que les expressions analytiques de h sont : $\begin{cases}x' = 4x\\ y' = 4y\\ z' = 4z+2\end{cases}$.

2) Soit le point N($\frac{1}{8}$, $\frac{\sqrt{3}}{8}$, 0) et Q son image par h.

a) Déterminer les coordonnées de Q.

b) Montrer que le triangle EFQ est équilatéral et calculer son aire.

3) a) Montrer que le volume du tétraèdre ΩEFQ est V = $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

b) Calculer le volume du solide AJNEFQ.

4) Soit (S) l'ensemble d'équation $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+5=0$.

a) Montrer que (S) la sphère de centre G et de rayon 1.

b) Montrer que (S) est tangente aux plans P_1=(ADE) et P_2=(ABE).

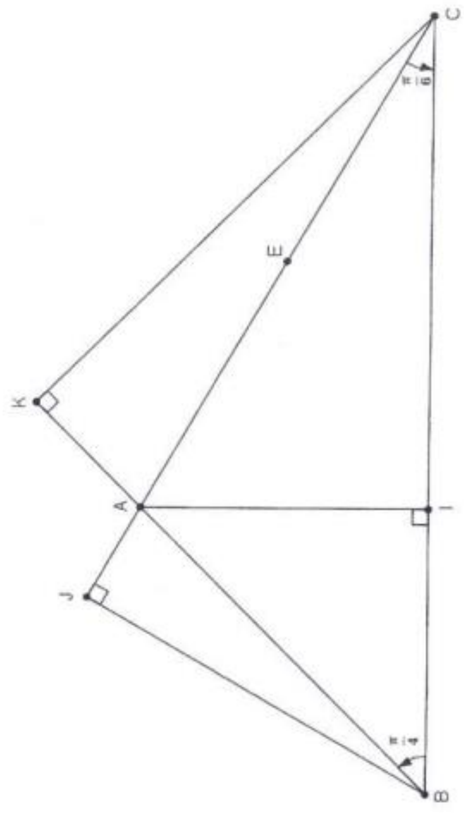
c) Justifier que la sphère (S')=h(S) est tangente aux plans P_1et P_2.

<u>Exercice 3(4 points)</u>

ABC est un triangle direct tel que

$(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}$ *[2π] et* $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}$ *[2π].*

Les points I, J et K sont les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement des sommets A, B et C. E= A∗C .



1) Montrer que le triangle AIE est équilatéral direct.

2) Soit S la similitude directe de centre A qui transforme I en B. On note Δ la médiatrice du segment [IE] et on pose f= $S o S_{\Delta}$ *.*

a) Déterminer l'angle et le rapport de S.

b) Déterminer f(E) et f(A).

c) Montrer que f est une similitude indirecte et préciser son rapport et son centre.

d) Caractériser fof . En déduire que f(B)=C.

e) Montrer que f((BJ))=(CK). Déduire que f(J)=K.

3) Soit g la similitude indirecte telle que g(C)=A et g(K)=I.

a) Justifier que le triangle BCK est isocèle, rectangle et direct puis montrer que B est le centre de g.

b) Montrer que le rapport de g est $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$*.*

c) Construire l'axe de g.

Exercice 4(6,5 points)

Soit n ϵ([IN*\ {1}] et $g_n$la fonction définie sur IR* par g_n(x)= $\frac{1}{x^n}\, e^{\frac{1}{x}}$.

1) a) Déterminer les limites de $g_n$aux bornes de son domaine de définition.

b) Vérifier que $g_n{}'$(x)= $\frac{-(nx+1)}{x^{n+2}}\, e^{\frac{1}{x}}$ puis étudier les variations de $g_n$sur IR suivant la parité de n.(Dresser un tableau de variation pour chaque cas)*

2) Soit f_n la restriction de g_n à l'intervalle]0, +∞[et (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

a) Justifier que f_n réalise une bijection de]0, +∞[sur]0, +∞[.

b) Etudier la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}). En déduire que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe K que l'on déterminera.

c) Tracer les courbes (C_2) et (C_3) dans le même repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

3) Soit I_n= $\int_1^2 f_n(x)dx$ où n ϵ *IN*\ {1}.*

a) Calculer I_2 puis établir que I_{n+1}= $e-\frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}}-(n-1)I_n$ pour tout n ϵ *IN*\ {1}.*

b) En déduire l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (C_2) et (C_3) et les droites d'équations x=1 et x=2.

c) Vérifier que 0$\leq f_n(x) \leq \frac{e}{x^n}$ pour tout x ϵ [1, 2] puis déduire que 0$\leq I_n \leq \frac{e}{n-1}$ pour tout n ϵ IN\ {1}.*

d) Montrer que la suite (I_n) est décroissante puis établir que pour tout n ϵ IN\ {1}, on a : $e-\frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} \leq n\, I_n \leq \frac{ne}{n-1}$. Calculer $lim_{n\to+\infty}\, n\, I_n$.*

4) Soit F la fonction définie sur]0, +∞[par F(x)= $\int_{\frac{1}{x^2}}^{1} e^{\sqrt{t}}\, dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur]0, +∞[et calculer F'(x) pour tout x>0.

b) Montrer que pour tout x>0, on a : F(x)= 2 $(1-\frac{1}{x})\, e^{\frac{1}{x}}$.

c) Calculer alors les limites de F aux bornes de son domaine de définition.