Exercice1 **(5points)**

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct tel que K et J sont les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AC]$. I est le centre de gravité de ce triangle.

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f et un unique antidéplacement g tels que

$$f(C) = g(C) = B \text{ et } f(J) = g(J) = K$$

   b) Caractériser f.

2) On désigne par S_1 , S_2 et S_3 les symétries orthogonales d'axes respectifs (AC) , (JB) et (JK). R la rotation de centre C et d'angle $(-\frac{\pi}{3})$ et $h = R\ o\ f$.

   a) Déterminer $h(J)$, caractériser h puis vérifier que $h = S_2\ o\ S_1$.

   b) Montrer que $g = f\ o\ S_1$.

   c) En déduire que $g = R^{-1}\ o\ S_2$.

3) On pose $\varphi = g\ o\ S_3$.

   a) Déterminer $\varphi(J)$ puis caractériser l'application φ.

   b) Caractériser alors g.

4) H est le milieu du segment $[AB]$, $D = S_1(B)$ et F est la similitude directe qui envoie A en D et H en J.

   a) Déterminer les éléments caractéristiques de F.

   b) Déterminer l'image de la droite (CH) par F.

5) On pose $F(E) = H$

   a) Montrer que HEB est un triangle isocèle.

   b) Montrer que (BE) et (HJ) sont deux droites perpendiculaires puis construire le point E.

6) Soit l'application $G = F\ o\ S_{(AB)}$

   a) Montrer que G est une similitude indirecte dont-on précisera le rapport et le centre.

   b) C' est l'image du point C par la similitude indirecte G. Montrer que A , C et C' sont alignés.

7) Dans cette question on rapporte le plan au repère orthonormé direct $(K, \overrightarrow{KC}, \vec{v})$.

   a) Déterminer l'écriture complexe de G.

   b) En déduire une équation de l'axe Δ de G puis le construire.

Exercice2 ***(3.5points)***

1) Soit $P(z) = z^3 - (5+6i)z^2 + (-6+16i)z + 20 + 10i$, $z \in \mathbb{C}$
   a) Calculer $P(-1+i)$ puis déterminer les complexes a et b tels que $P(z) = (z+1-i)(z^2 + az + b)$
   b) En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

2) Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_1 = -1 + i$, $z_2 = 3 + i$ et $z_3 = 3 + 4i$.
   Placer les points A, B, C, I et D où I est le milieu du segment $[AB]$ et D est le barycentre des points pondérés $(A, 3)$ et $(B, 1)$.

3) Soit H l'hyperbole de foyers A et B dont D est un sommet.
   a) Déterminer le centre et l'excentricité de H.
   b) Vérifier que l'équation réduite de H dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, s'écrit $(x-1)^2 - \frac{(y-1)^2}{3} = 1$.
   c) Déterminer le deuxième sommet, les directrices et les asymptotes de l'hyperbole H et la construire.

Exercice3 ***(4.5points)***

PARTIE A

Soit $n \in \mathbb{N}$ et α un diviseur premier strictement supérieur à 2 de $a^{2^n} + 1$ où a est un entier premier avec α .

1) Soit d le plus petit entier naturel non nul vérifiant $a^d \equiv 1 (\bmod\, \alpha)$.
   a/ Montrer que si k un entier naturel qui vérifie $a^k \equiv 1 (\bmod\, \alpha)$ alors d divise k.
   b/ En déduire que d divise $\alpha - 1$ et 2^{n+1} .
2) a/ Montrer que $d = 2^{n+1}$.
   b/ En déduire que $\alpha \equiv 1 (\bmod\, 2^{n+1})$.

PARTIE B :

On se propose de déterminer l'ensemble (A) des couples de nombres premiers p et q pour lesquels $3^p + 3^q \equiv 0 (\bmod\, pq)$.

Dans la suite de l'exercice on suppose que (p, q) est un élément de (A).

1) On suppose dans cette question que $p = q$.
   a/ Justifier que p est impair.
   b/ Montrer alors que $p = q = 3$
2) a/ Montrer que si $p = 2$ alors $q = 3$
   b/ Vérifier que $(3, 5)$ est un élément de (A) .
3) On suppose dans cette question que $3 < p < q$.

On pose $q - p = 2^m k$ où $(m, k) \in \mathbb{N}^2$ et k est impair.
   a/ Montrer que $3^{q-p} + 1 \equiv 0 (\bmod\, p)$ et $3^{q-p} + 1 \equiv 0 (\bmod\, q)$.
   b/ Montrer alors que $q - p \equiv 0 (\bmod\, 2^{m+1})$.
   c/ Conclure
4) Déterminer l'ensemble (A).

Exercice4 ***(7points)***

A) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}}}$, si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$.

On note $(\mathscr{C}_n)$ la représentation graphique de f_n dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que f_n est continue et dérivable à droite en O.

2) Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f_n'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

3) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f_n(x)$ puis dresser le tableau de variation de f_n .

4) Montrer que la droite $D_n : y = x - n$ est une asymptote à $(\mathscr{C}_n)$.

5) Construire $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$.

6) Pour $x > 0$, on pose $F_1(x) = \int_1^x f_1(t)\,dt$.

a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $F_1(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{2e} - \frac{1}{2}\int_1^x e^{-\frac{1}{t}}dt$

b) En déduire que pour $x \geq 1$ on a : $F_1(x) \geq \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x}}(x^2 - x + 1) - \frac{1}{2e}$

B) 1) Montrer qu'il existe un réel unique a_n tel que : $f_n(a_n) = 1$.

2) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n > 1$ et que $a_n \ln(a_n) = n$.

3) Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $g(x) = x\ln x$.

a) Montrer que g est une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

c) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

d) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln(a_n) + \ln(\ln(a_n)) = \ln(n)$. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln a_n}{n} = 0$.

e) Montrer que $f_n(a_{n+1}) = e^{\frac{1}{a_{n+1}}}$.

C) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f_n(t)dt$, J_n la valeur moyenne de f_n sur $[a_n, a_{n+1}]$ et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} I_k$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 \leq J_n \leq e^{\frac{1}{a_{n+1}}}$.

2) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

3) Pour $x > 0$, on pose $F_n(x) = \int_1^{\frac{x}{n}} f_n(t)dt$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que F_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $F_n'(x) = f_1\left(\frac{x}{n^2}\right)$.

b) En déduire que pour tout $x > 0$: $F_n(x) = n^2 F_1\left(\frac{x}{n^2}\right) - n^2 F_1\left(\frac{1}{n}\right)$.

c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x)$.