Devoir de Synthèse n°2

Exercice n°1 — 7 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ et on désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

N.b. Utiliser des couleurs différentes pour la traçage des courbes de chacun des fonctions

1. a. Soit a un réel ; Exprimer $f(x) - f(a)$ en fonction de $(x - a)$.
   b. Calculer $f(-1)$ et en déduire une factorisation de $f(x)$.
   c. Déduire alors l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$
   Et de l'inéquation $f(x) < 0$.
2. a. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion A . En précisera leur coordonnées .
   b. Détenniner l'équation de la tangente D à $\mathscr{C}_f$ au point $x_0 = 1$.
   c. Trcer $\mathscr{C}_f$ et D.
3. On appelle g la fonction définie par $g(x) = \left|f(x)\right|$
   a. Etudier la contnuité et la dérivabilité de g en $x_0 = -1$.
   b. Tracer $\mathscr{C}_g$
4. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(|x|)$.
   a. Montrer que h est paire.
   b. Déduire la traçage $\mathscr{C}_h$ à partir de $\mathscr{C}_f$. Puis tracer $\mathscr{C}_h$

Exercice n°2 — 3 points

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est correcte.

Sur votre copie indiquer le numéro de question et la lettre de votre réponse choisit .

1. Z un nombre complexe non réel le conjugué de $1 + iZ$ est :

   a. $-1 - i\overline{Z}$ b. $1 - iZ$ c. $1 - i\overline{Z}$

2. Soit le nombre complexe $j = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ alors la forme trigonométrique de j égal à :

   a. $\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$ b. $\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$ c. $\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$

3. Si $z = \left(\sqrt{3} - i\right) - 2i$ alors $|z|$ égal à

   a. 0 b. $2\sqrt{3}$ c. $\sqrt{3} - 2$

4. Soit la fonction définie sur $\left]0; +\infty\right[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$ alors

   a. $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ b. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ c. $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

Exercice n°3 — 7 points

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ on considère les points A , B , C et I d'affixe respective $z_A = -2i$, $z_B = 1+i$, $z_C = 4+2i$ et $z_I = 2$

1. a. Placer les points A , B , C et I.
   b. Vérifier que I est le milieu du segment $\left[AC\right]$.
2. a. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
   b. Montrer que le triangle ABC est un triangle isocèle de sommet principale B.
3. Soit D le symétrique de B par rapport à I.
   a. Déterminer l'affixe z_D du point D.
   b. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un losange.
   c. Calculer $\left|z_C - z_A\right|$ et $\left|z_D - z_B\right|$. En déduire l'aire de $ABCD$.
4. Déterminer et construire les ensembles suivants :
   a. $\mathscr{E} = \left\{M(Z) \in \mathscr{P} / \left|Z - 2i\right| = \sqrt{10}\right\}$.
   b. $\mathscr{F} = \left\{M(Z) \in \mathscr{P} / \left|Z - 1 - i\right| = \left|Z - 4 - 2i\right|\right\}$.

Exercice n°4 — 3 points

1. Mettre chacun des nombres complexes $1 + i\sqrt{3}$ et $1 - i$ sous forme trigonométrique
2. Soit $u = \left(1+\sqrt{3}\right) - i\left(1-\sqrt{3}\right)$.
   a. Vérifier que $u = \left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(1 - i\right)$.
   b. Déterminer alors la forme trigonométrique de u
   c. En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$