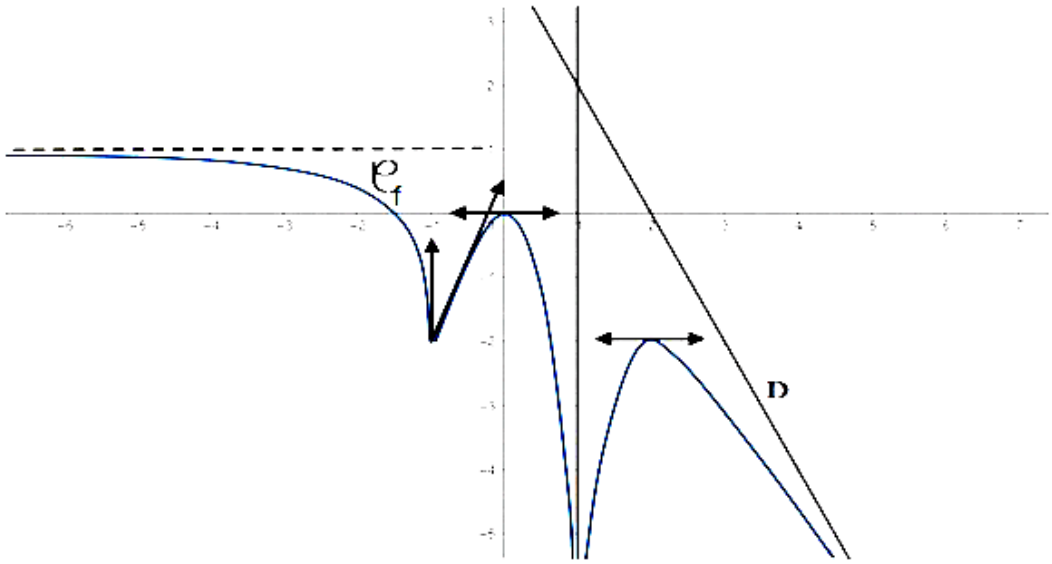
Epreuve : MATHEMATIQUES	Devoir de synthèse N°2 ********** Sujet commun	Commissariat régional Tunis 1
13 Mars 2024	Durée : 2 h	Niveau : 3ème Année ******** Section: Sciences expérimentales

Le sujet comporte 3 pages

Exercice N°1: (4 points)

La courbe ci-dessous $\mathcal{C}_f$ est la représentation graphique dans un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'une fonction f définie sur IR\{1} .

- La droite D: y = -2x +4 est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de +∞
- La droite D' : y =1 est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de -∞.
- A(-$\frac{3}{2}$; 0) est un point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et (O, $\vec{\imath}$).



Par lecture graphique:

1) Déterminer $f'(2); f'(0)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{f(x)+2}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{f(x)+2}{x+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+2x$.
2) Dresser le tableau de variations de f.
3) Soit g la fonction définie sur IR\{1} tel que $g'(x) = f(x)$ et $\mathcal{C}_g$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$;

   Répondre par vrai ou faux en justifiant :

   a) g admet un extremum local en (-$\frac{3}{2}$) .

   b) $\mathcal{C}_g$ admet une tangente perpendiculaire à la droite Δ: y = $1-x$.

   c) $g(-4) > g(-2)$.

Exercice N°2: (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x-2}$ avec a, b et c des réels et on désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormée $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

1)a) Déterminer la constante c pour que $\mathcal{C}$ passe par le point $A(0,-\frac{3}{2})$.

b) Pour la valeur de c trouvée ; vérifier que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et que

$$f'(x) = \frac{ax^2 - 4ax - 2b - 3}{(x-2)^2}$$

c) Déterminer a et b pour que f admet un extremum en 1 égale à (-1).

Dans la suite de l'exercice on prend $a = 1; b = -3$ et $c = 3$.

2) Dresser le tableau de variation de f.

3)a) Ecrire une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en A.

b) Montrer que la droite $\Delta: y = x - 1$ est une asymptote à $\mathcal{C}$.

c) Soit Ω le point d'intersection de Δ et l'asymptote verticale.

Donner les coordonnées de Ω.

d) Montrer que Ω est un centre de symétrie pour $\mathcal{C}$.

4) Tracer $\mathcal{C}$.

Exercice N°3: (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$.

Soient les A(0,2,0) ; B(-2,0,1) et C(-2,0,2).

1)a) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

2) On donne les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ définis par : $\mathcal{P}: x - y + 2 = 0$ et $\mathcal{Q}: x + y - z - 1 = 0$.

a) Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont perpendiculaires.

b) Soit $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$. Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

3) Soit E (1,5,0).

a) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{R}$ passant par E et perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$.

b) On pose $\{H\} = \mathcal{D} \cap \mathcal{R}$. Déterminer les coordonnées du point H.

c) Déduire la distance du point E à la droite $\mathcal{D}$.

4) On considère la droite Δdéfinie par : $\begin{cases} x = -1 - 2\beta \\ y = 3 - 4\beta \\ z = 2 + 3\beta \end{cases}$ avec $\beta \in IR$

a) Vérifier que Δ est incluse dans le plan $\mathcal{R}$.

b) Que peut –on dire des deux droites $\mathcal{D}$ et Δ ? Justifier.

<u>Exercice N°4:</u> (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (o,$\vec{u},\vec{v}$).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives 1, -1 et 2+i.

Soit $f: P \setminus \{A\} \to P$

M(z) $\longmapsto$ M'(z') tel que $z' = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$

1)a) Déterminer les affixes des points B' et C' images respectives des B et C par f.

b) Montrer que : si M est un point de (O,$\vec{\imath}$) $\setminus \{A\}$ alors $f(M) = B$.

2) Montrer que $|z'| = 1$. que peut-on conclure ?

3)a) Montrer que $\frac{z'-1}{z-1}$ est un réel. En déduire que les points A, M et M' sont alignés.

b) Expliquer comment, en utilisant les résultats précédents, construire le point

M' connaissant le point M.