Epreuve : MATHEMATIQUES	**Devoir de synthèse N°2** *************************** **Sujet commun**	**Commissariat régional Tunis 1**
13 Mars 2024	**Durée : 3 h**	**Niveau : 3ème Année** ******** **Section: MATHEMATIQUES**

Le sujet comporte 5 pages dont l'annexe page 5 est à rendre avec la copie.

Exercice N°1: (4.5 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tel que :

- $a = -2 + 2i\tan(\alpha)$ et $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
- $a \times b = -16\, i$
- $c = -4$

A) On prend $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{3}}$

1) Donner l'écriture trigonométrique de a puis construire le point A.
2) a) Montrer que B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$

   b) Construire le point B.

3) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 + 2(2+\sqrt{3})z + 8 + 4\sqrt{3} = 0$

   a) Vérifier que pour tout nombre complexe z on a :

   $$z^2 + 2(2+\sqrt{3})z + 8 + 4\sqrt{3} = (z + 2 + \sqrt{3})^2 + 1$$

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

4) On désigne par z_1 et z_2 les solutions de (E) tel que $Im(z_1) > 0$ et par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2

   a) Vérifier que M_1 est le milieu de $[BC]$.

   b) Construire les points M_1 et M_2 .

B) On prend $\boldsymbol{\alpha} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

1) Sur quelle ligne fixe se déplace le point A quand α *varie dans* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

2) Déterminer la forme trigonométrique de a.

3)a) Montrer que b-4i=4(-sin (2 α)+icos (2 α)).

   b) Déduire l'ensemble des points B quand α varie dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice N°2: (5.5 points)

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = \sqrt{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2 - \frac{4}{U_n^2+3}} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

1) Sur l'annexe fournie **(Figure 1)**, on donne la droite $\Delta: y = x$ ainsi que la courbe $(\boldsymbol{\Gamma}): \mathbf{y} = \sqrt{2 - \frac{4}{x^2+3}}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

   a) On a placé U_0 sur $(O,\vec{i})$. Placer sur $(O,\vec{i})$ les termes U_1 et U_2 . (On ne demande pas de les calculer)

   b) Conjecturer le sens de variation de la suite (U_n) .

2)a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $1 < U_n \leq \sqrt{2}$.

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{(1-U_n^2)(2+U_n^2)}{3+U_n^2}$.

   c) En déduire le sens de variation de (U_n) .

3)a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1}^2 - 1 \leq \frac{U_n^2-1}{4}$.

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n^2 - 1 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

   c) Déduire que $U_n - 1 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ puis determiner la limite de (U_n) .

4)a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $n^2 \leq 4^n$.

   b) En déduire la limite de la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_n = n(U_n^2 - 1)$.

5) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k^2$ et $T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{V_k}{k}$.

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $n \leq S_n \leq n + \frac{1}{3}$ et Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

   b) Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

Exercice N°3: (3 points)

On dispose d'une une urne contenant 10 boules réparties de la manière suivante :

- 5 boules rouges numérotées : $0, 1, 3, 3$ *et* 3 .
- 3 boules vertes numérotées : $0, 1$ *et* 3 .
- 2 boules noires numérotées : 0 *et* 2 .

1) On tire simultanément 3 boules de l'urne.

   a) Déterminer le nombre des tirages possibles contenant 3 boules de couleurs différentes.

b) Déterminer le nombre des tirages possibles contenant 2 boules portant le numéro 0 et une seule boule noire

c) On note p le produit des numéros des boules tirées.
Déterminer le nombre des tirages possibles vérifiant $p \in [0,3]$.

2) Après avoir remis toutes les boules tirées dans l'urne, on tire successivement et avec remise 3 boules de l'urne. On désigne par a, b et c, les numéros respectifs de la première, la deuxième et de la troisième boule tirée.
Soit $(\mathrm{U_n})$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : U_0= a $et\ U_{n+1} = C_3^b U_n + c$

a) Dénombrer les cas possibles d'avoir une deuxième boule numéro 3 au troisième tirage.

b) Déterminer le nombre des tirages possibles où la suite $(\mathrm{U_n})$ est arithmétique.

c) Déterminer le nombre des tirages possibles où la suite $(\mathrm{U_n})$ est géométrique non constante.

<u>Exercice N°4:</u> (3.5 points)

1)a) Montrer par récurrence que pour tout $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$, $7\ divise\ 4^{3n} - 1$.

b) En déduire les restes de la division euclidienne de $4^{3\mathrm{n}+1}$ par 7 et de $4^{3\mathrm{n}+2}$ par 7.

Dans la suite de l'exercice, on considère dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'équation $(E): 3x - 5y = 7$.

2)a) Vérifier que $(4,1)$ est une solution de (E).

b) Résoudre alors dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'equation: (E) .

3) Pour tout $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$, on pose $a = 5n + 4\ et\ b = 3n + 1$ et on désigne par $d = a \wedge b$.

a) Vérifier que (a, b) est une solution de (E)

b) En déduire que d divise 7 .

c) Soit n un entier supérieur ou égal à 2 .
Montrer que : $\mathrm{d} = 7$ si et seulement si 7 divise $\mathrm{n} - 2$.

4) En déduire les entiers naturels p pour que : $(5 \times 4^p + 4) \wedge (3 \times 4^p + 1) = 7$.

<u>Exercice N°5:</u> (3.5 points)

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x-1}$ et on designe par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1)a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 puis interpréter graphiquement le résultat.

2) Dans l'annexe ci-jointe **(Figure 2)** , on a tracé dans un repère $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la droite $D: y = 2x$, la courbe $(C_1): y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ pour tout $x > 0$ et la courbe $(C_2): y = x^2 - \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. La droite D coupe la courbe (C_1) en un seul point d'abscisse α .

a) Déterminer graphiquement le signe de $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$ pour tout $x > 1$.

b) Vérifier que $f(\alpha) = \alpha^2 - \frac{1}{\alpha}$.

c) Construire le point $A\big(\alpha, f(\alpha)\big)$.

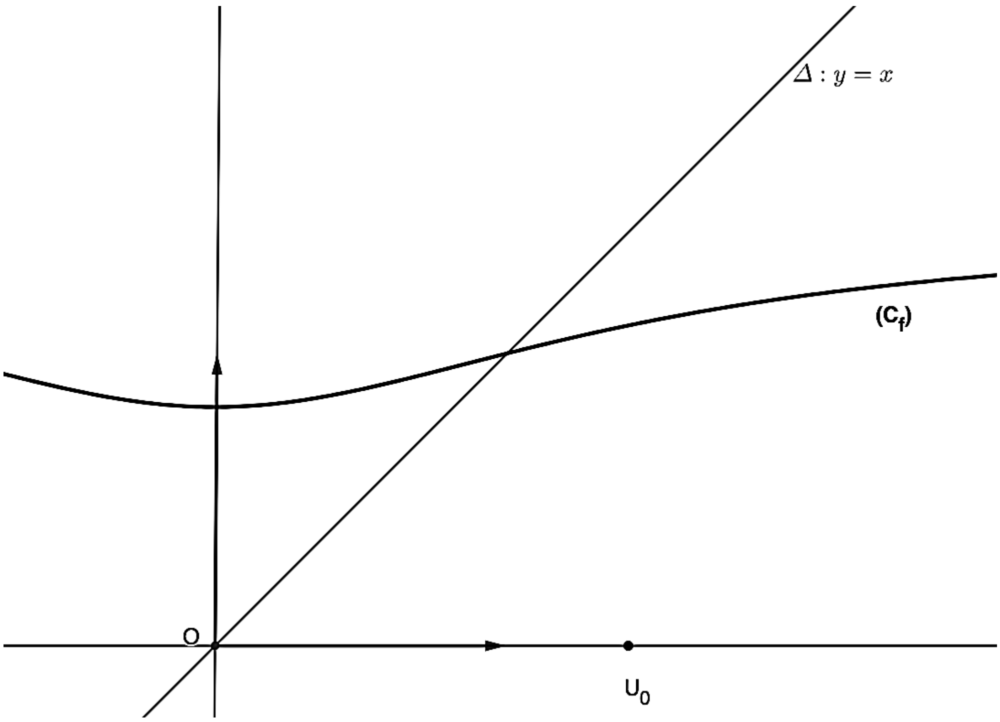
d) Dresser le tableau de variations de f.

e) Déterminer l'équation de la tangente (T) a la courbe (C_f) au point d'abscisse 2

3) Tracer sur le même repère la tangente (T) et la courbe $\left(C_f\right)$.

Annexe à rendre avec la copie
Nom .... Prénom …………........... .... Classe : .... N°.......

<u>Exercice N°2 :</u> **Figure 1**



<u>Exercice N°5 :</u> **Figure 2**