D.R.E. : Ben Arous et Sfax-1	Devoir de synthèse N°2		Niveau : $3^{ème}$ Math
Date : 11 / 03 / 2024	Mathématiques	Coefficient : 4	Durée : 3 h

Noter bien : • Il sera tenu compte de la rigueur et de la clarté des réponses.
• Aucun document n'est autorisé, sauf, une calculatrice non programmable.

Exercice N°1: (3,5 points).

► Lors d'un tournoi de football, l'entraîneur de notre équipe nationale dispose de 23 joueurs dont trois gardiens de but, huit défenseurs, six joueurs du milieu et six attaquants.
► Une formation est un groupe composé de onze joueurs comportant un seul gardien.
► Le choix tactique de l'entraîner est de joueur avec quatre défenseurs, quatre joueurs du milieu et deux attaquants.
► On suppose que les joueurs d'une même ligne sont tous de même qualité sans tenir compte du poste de chacun d'eux.

1. Quel est le nombre de formations possibles selon ce choix tactique ?
2. Au cours du match, deux de nos joueurs titulaires sont avertis l'un après l'autre, dénombrer les cas qu'ils soient deux défenseurs.
3. Après avoir encaissé un but, et afin d'égaliser le score, l'entraîneur décide d'en sortir un joueur de milieu et de le remplacer par un attaquant.
   a. Dénombrer tous les cas possibles.
   b. Notre équipe arrive à arracher une victoire avec le score (2 à 1).
   Dénombrer les cas que nos buts soient marqués par un attaquant et un joueur du milieu.
4. Le jour du second match, un gardien de but et deux attaquants souffrent de gràves blessures et n'arrivent pas à participer avec leurs coéquipiers, combien a-t-il alors de formations possibles selon le tactique initial ?

Exercice N°2: (6 points).

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x^3-x^2}$ de courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1. Calculer $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement ces résultats.
2. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. a. Justifier que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ puis vérifier que $\forall x>1$ on a $f'(x)=\dfrac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$
   b. Dresser le tableau de variation de f sur $[1,+\infty[$
4. a. On note f'' la dérivée de f' , montrer que pour tout $x>1$ on a $f''(x)=\dfrac{3x-4}{4(x-1)\sqrt{x-1}}$
   b. En déduire que f' admet un extremum en un réel x_0 que l'on déterminera.
   c. Vérifier qu'une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point I d'abscisse x_0 est :$y=\sqrt{3}x-\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$
5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ à l'annexe ci-jointe (fig-1) où on a placé le point I et la tangente T (on peut s'aider du tableau donné).

Exercice N°3: **(5 points).**

Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2+u_n}{\sqrt{8+u_n^2}} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1 Vérifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2 **a** Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq u_n < 1$

b Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} \geq \dfrac{2+u_n}{3}$

c En déduire le sens de variation de la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$

3 **a** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $1 - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{3}(1-u_n)$

b En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $1 - u_n \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

c Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4 Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

a Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $S_n \geq n - \dfrac{3}{2}\left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$

b En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Exercice N°4: **(5,5 points).**

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1 Soit le nombre complexe $c = \dfrac{-2}{1+i\sqrt{3}}$

a Ecrire c sous forme la forme algébrique.

b Déterminer le module et un argument de c

c Montrer que $c^2 = \bar{c}$ et que $c^2 + c + 1 = 0$

2 Soit $d = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

a Mettre d sous forme trigonométrique.

b En déduire une forme trigonométrique du nombre complexe $w = \dfrac{2c}{\bar{d}}$

c Déterminer, alors, les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$

3 On considère les points C et D d'affixes respectives c et d

a Placer les points C et D sur l'annexe ci-jointe (fig-2).

b Déterminer et construire chacun des ensembles suivants :

$E = \left\{ M(z) \in P \;/\; \left|\dfrac{c-z}{z-d}\right| = 1 \right\}$ et $F = \left\{ M(z) \in P \;/\; \left|iz - i\sqrt{2} - \sqrt{2}\right| = |c-d| \right\}$

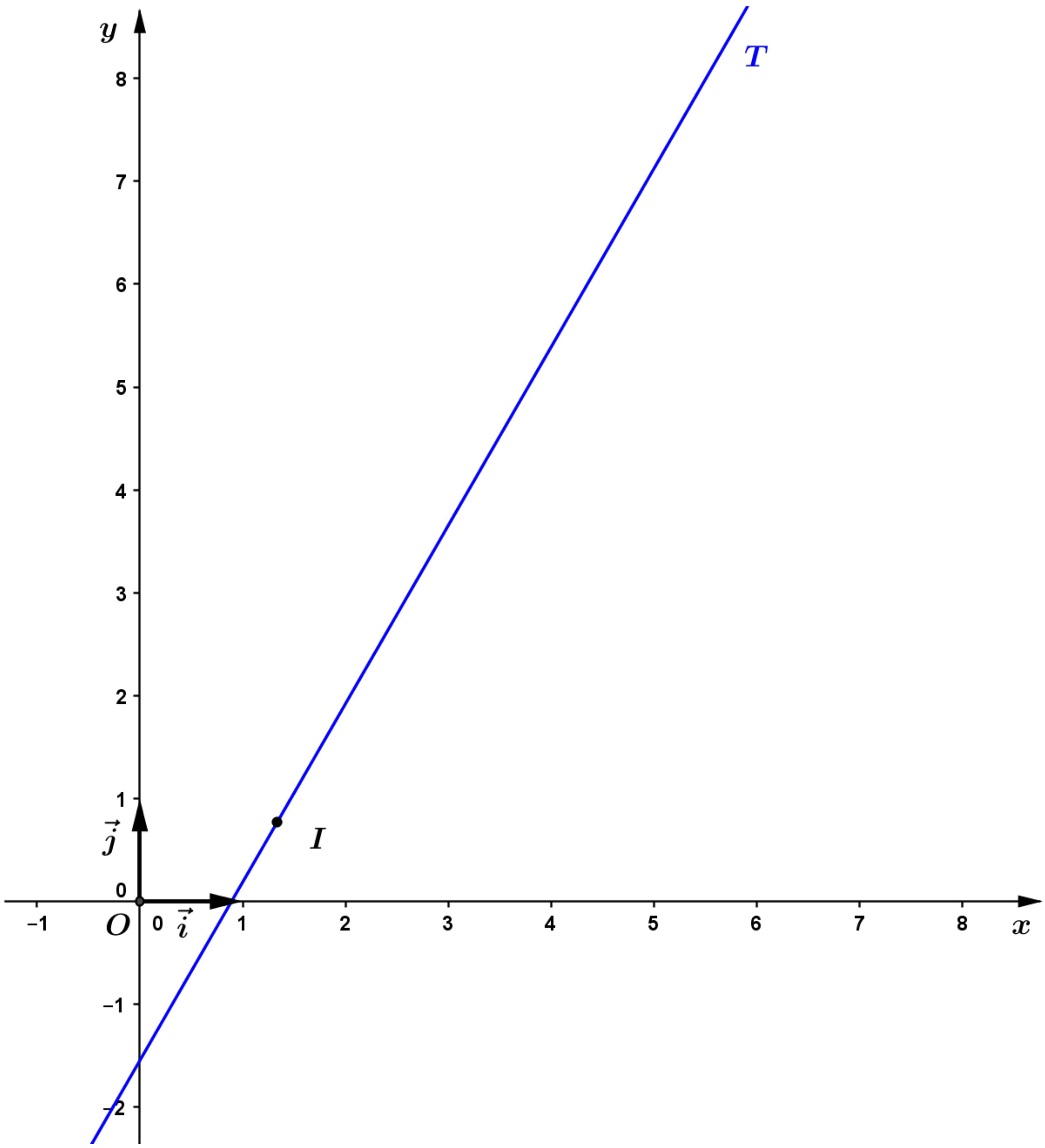
Devoir de synthese N°2 en mathématiques pour $3^{ème}$ math 2023/2024

Annexe à rendre avec la copie

Nom et prénom : .... **Classe :** $3M$... **N° :** ....

Exercice2 : (fig-1).

x	1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f(x) - x\sqrt{3} + \frac{8\sqrt{3}}{9}$		$-$	0	$+$	



Exercice4 : (fig-2).