Lycée secondaire Ibn Sina Grombalia ***** **Devoir de synthèse n°2** ***** **2023/2024**	***Prof : Mr. Ben ChaabeneEzzeddine***	
	Épreuve : Mathématique	
3 Maths	**Durée : 3h**	**12/03/2024**

Exercice N°1 : (02pts)

Répondre par « Vrai » ou « Faux » en justifiant la réponse :

1) Le nombre dérivé en 1 de la fonction $f: x \mapsto x + 2\sqrt{x}$ est 2
2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$
   L'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1 est $y = x - 1$
3) Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes alors conjugué de :
   $z = z_1 + iz_2$ est $\bar{z} = z_1 - iz_2$
4) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé directe $(o, \vec{u}, \vec{v})$.
   On considère les points A et B d'affixes respectives 2 et $1 + i\sqrt{3}$
   On a B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Exercice N°2 : (06pts)

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2-7x+7}{x-1} & si\ \ x \leq 2\ \ et\ \ x \neq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2-4x+5}\ si\ \ x > 2 \end{cases}$

On désigne par (C_f) la représentation graphique de f dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Etudier la continuité de f en 2
   b) Etudier la dérivabilité de f en 2
2) On se propose de déterminer les réels a et c tels que pour tout :
   $x \neq 1$; $\frac{2x^2-7x+7}{x-1} = ax - 5 + \frac{c}{x-1}$
   a) Calculer $f(0)$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$
   b) En déduire les valeurs de a et c
3) Dresser le tableau de variation de f
4) a) Donner la forme canonique de $x^2 - 4x + 5$

b) Déduire alors que la droite Δ d'équation $y = x - 2$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

c) Etudier le comportement de (C_f) au voisinage de $(-\infty)$

d) Tracer (C_f)

5) Soit (D) la droite d'équation $x = 1$. On pose $(D) \cap (ox) = \{A\}$

On désigne par M un point de (C_f) d'abscisse $1 < x \leq 2$ et par L et K les projetés orthogonaux respectifs de M sur (ox) et sur (D)

a) Calculer, en fonction de x, l'aire $A(x)$du rectangle ALMK

b) Pour quelle valeur de x, cette aire est-elle minimale.

Exercice N°3: (04pts)

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n - 1}{4U_n} \text{ ; } pour\ tout\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n ; $U_n > \frac{1}{2}$

   b) Montrer que la suite U est décroissante.

2) Soit V la suite définie par $V_n = \frac{2}{2U_n - 1}$

   a) Montrer que V est une suite arithmétique de raison 2.

   b) En déduire V_n puis U_n en fonction de n

3) On pose $W_n = \frac{1}{V_0} \text{ x } \frac{1}{V_1} \text{ x } \frac{1}{V_2} \text{ x } \dots \dots \text{ x } \frac{1}{V_n}$

   a) Calculer W_0

   b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n; $W_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

   c) Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} W_k$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $0 < S_n < 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Exercice N°4: (04pts)

Une urne contient 9 boules :

3 boules rouges numérotées -1 ; -1 ; 1

2 boules vertes numérotées -2 ; 2

4 boules blanches numérotées 1 ; -2 ; 2 ; 2

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément 3 boules de l'urne.
   Quel est le nombre de tirage possible.
2) Quel est le nombre de tirage possible contenant :
   a) 3 boules dont le produit des trois numéros marqués est négatif.
   b) 3 boules de même couleur.
   c) 3 boules de même couleur et donnant un produit de numéros négatif.
   d) 3 boules de même couleur ou donnant un produit de numéro négatif.
3) On tire maintenant 3 boules successivement et avec remise
   Quel est le nombre de tirage possible.
4) Quel est le nombre de tirage contenant :
   a) 3 boules de couleurs différentes.
   b) 3 boules de couleurs différentes dont la 1ère est rouge.
   c) 3 boules dont le produit des trois numéros marqués est négatif.

Exercice N°5: (04pts)

1) On se propose de résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$; l'équation (E) : $z^2 + iz + 1 = 0$
   a) Montrer que $z^2 + iz + 1 = \left(z + \frac{i}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$
   b) En déduire les solutions de l'équation de (E)
2) Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{2z-i}{iz+1}$
   a) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $f(M) = M$
   b) Déterminer l'ensemble des points M du plan pour lesquels $|z'| = 2$
3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$.
   On considère les points $A(-1)$ et $B(-i)$ et l'application g du plan qui à $M(z \neq -i)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{1+iz}{1-iz}$
   a) Montrer que $g(A) = B$
   b) Montrer que pour tout $z \neq -i$; on a $(z' + 1)(1 - iz) = 2$
   c) Montrer que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AM'}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BM}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$
   d) En déduire l'ensemble des points M' lorsque le point M décrit la droite :
      $(OB) / \{B\}$