	Lycée pilote 15 octobre 1963 - Bizerte	Classes : 3ème Maths 3
	Prof: Mme Nemri Fatma Bayoudh	Date : 14/03/2024 * Durée : 3 heures
	Devoir de synthèse n °2 en mathématiques	Nom et prénom :

Exercice 1 — 2,5 points .

Suite aux frappes israéliennes sur la bande de Gaza, un scénario terrifiant se répète chaque jours partout dans les hôpitaux palestiniens une scène qu'il ne faut jamais oublier : Dans le service de réanimation 12 victimes gravement blessées se présentent , dont 5 sont de groupe sanguin A , 3 de groupe sanguin B , 2 de groupe sanguin AB et 2 de groupe sanguin O.

1) Seulement 4 lits numérotés de 1 à 4 sont disponibles dans ce service, on choisit alors 4 blessés, Dénombrer les choix dans chacun des cas suivants :

a) Les quatre blessés sont de quarte groupes sanguins différents

b) Choisir deux blessés de groupe A et deux de groupe O.

2) Parmi les victimes, il y a une femme et ses deux enfants innocents.

On dispose dans ce service de trois médecins de garde X, Y et Z.

Chaque blessés est sous contrôle de l'un des trois médecin.

Dénombrer les répartitions dans chacun des cas suivants :

a) Dr X s'occupe de la femme , de ses deux enfants et de deux autre blessés , Dr Y s'occupe de trois blessés et Dr Z s'occupe du reste des blessés.

b) Chaque médecin s'occupe d'exactement 4 blessés

Exercice 2 — 4,5 points

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Dans l'annexe jointe, A et B désignent les points d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$

Soient $\mathcal{C}$ le cercle de centre B de rayon 2 et $\mathcal{C}'$ le cercle de centre A et de rayon 1.

On considère l'application f qui, à tout point M différent du point B, d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{z-1}{z+1}$

1. a) Déterminer les points invariants par f .

b) Montrer que l'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$ est l'axe $(O, \vec{v})$

2. a) Montrer que pour tout nombre complexe z différent de -1 , on a $(z' - 1)(z + 1) = -2$.

b) En déduire que si M appartient au cercle $\mathcal{C}$ alors M' appartient au cercle $\mathcal{C}'$.

3. Soit le point P d'affixe $p = -2 + i\sqrt{3}$.

a) Déterminer la forme trigonométrique de $(p + 1)$.

b) Justifier que le point P appartient au cercle $\mathcal{C}$ et que $(p + 1)^{2025}$ est un réel positif.

4. Soit Q le point d'affixe $q = \bar{p}$ où $\bar{p}$ est le conjugué de p.

a) Placer les point P et Q en justifiant.

b) Montrer que $\frac{p'-1}{q+1}$ est un réel négatif.

c) En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P' du point P par l'application f.

Exercice 3 — 8 points

A. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

On désigne par $\mathcal{C}f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Ecrire une équation de la tangente T à $\mathcal{C}f$ au point O et étudier la position relative de $\mathcal{C}f$ et T.

2. Tracer $\mathcal{C}f$ et T.

B. On considère la suite (U_n)définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+U_n^2} \end{cases}$

1. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n \leq 1$.

b) Etudier le signe de $U_{n+1} - U_n$.

c) En déduire que la suite (U_n) est croissante et qu'elle est minorée par $\frac{1}{2}$.

2. a) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1-U_n}{1+U_n^2} \leq \frac{1}{2\left(1+U_n^2\right)}$.

b) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 - U_{n+1} \leq \frac{2}{5}(1 - U_n)$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 - U_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3. On pose pour tout n $\in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} U_k$

a) Montrer que $\frac{n+1}{n} - \frac{5}{3n}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right) \leq S_n \leq \frac{n+1}{n}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

4. On pose pour tout n $\in \mathbb{N}^*$, $V_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n} 2^k U_k$

a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $\frac{2^{n+1}}{U_{n+1}} - \frac{2^n}{U_n} = 2^n U_n$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

5. On pose pour tout n $\in \mathbb{N}^*$, $W_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{U_k}{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{1+U_k^2}\right)$

Montrer que la suite (W_n) est divergente

Exercice 4 — 5 points

Les parties A et B sont indépendantes Ainsi que les questions 1 , 2 et 3 de la partie **A**

A/

1. Soit n un entier naturel

a) Montrer par récurrence que pour tout n , $3^{4n} - 1$ est divisible par 10.

b) Déduire le chiffre des unités de 3^{2023}

2. Soient a et b deux entiers naturels non nuls et p un nombre premier tels que $(a+b) \wedge ab = p$.

a) Montrer que $a \wedge b = p$

b) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$, le système $\begin{cases} (a+b) \wedge ab = 13 \\ a \vee b = 156 \end{cases}$

3. Soit n un entier naturel

a) Montrer que les entiers $(n+2)$ et $(n^2+7n+11)$ sont premiers entre eux.

b) Déterminer les entiers naturels n tels que $(n+2)$ divise $(n+18)(n^2+7n+11)$.

B/ Un nombre de Mersenne est un nombre de la forme 2^k-1 où k est un entier naturel non nul

On pose $M_k = 2^k - 1$

1. Soient m, n deux entiers naturels non nuls distincts .

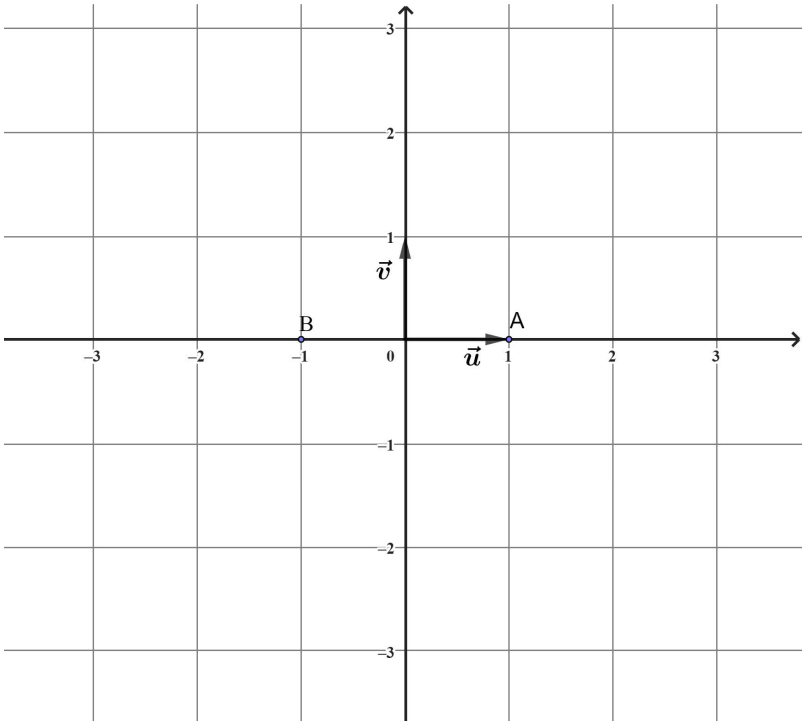
a) Vérifier que , $2^{m.n} = \left((2^m - 1\,) + 1\right)^n$.

b) A l'aide de la formule du binome de Newton, montrer que $2^m - 1$ divise $2^{m.n} - 1$

c) En déduire que si M_k est premier alors k est premier.

2. Déterminer les nombre premiers p tels que p divise M_{3p}

Annexe Exercice 2



Bon travail