Lycée Said Boubaker Moknine Devoir de synthèse n°2 Prof : **Naija Yosra**	Niveau : $3^{\text{éme}}$ Maths Epreuve : Mathématiques Durée : 3h / date: 14/3/2024

Exercice 1 : 5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-1$.

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) a) Vérifier que pour tout réel $x\neq 0$, $f'(x)=\frac{x-2}{x^3}$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) Déterminer les asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$.

d) Donner une équation de la tangente T à $(\mathcal{C}_f)$ au point de coordonnés $(-1{,}1)$.

2) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $]-2,-1[$ une unique solution α .

b) On admet que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β tel que $\beta\in\,]0{,}1[$.
Vérifier que α et β sont les solutions de l'équation $x^2+x-1=0$.

c) On donne en annexe la courbe représentative de la fonction u définie par $u(x)=x^2$ et la droite $\Delta\colon y=-x+1$.

Construire alors les points A et B de $(\mathcal{C}_f)$ d'abscisses respectives α et β.

3) Tracer T et $(\mathcal{C}_f)$ dans le même repère donné en annexe.

Exercice 2 : 3 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit α *un réel de* $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et les points B et C d'affixes respectives $z_1=-cos\alpha(cos\,\alpha+isin\,\alpha)$ et $z_2=i\,sin\alpha\,(cos\,\alpha+isin\,\alpha)$. Soit I le milieu du segment $[BC]$.

1) a) Montrer que $z_I=\frac{-1}{2}$

b) Vérifier que $z_2-z_1=\cos(2\alpha)+isin(2\alpha)$.

c) Montrer que $OB^2+OC^2=BC^2$ et en déduire la nature du triangle OBC.

2) Soit A le point d'affixe -1 .

a) Montrer $OBAC$ est un rectangle.

b) Pour quelle valeur de α , $OBAC$ est-il un carré ?

c) Pour cette valeur de α ,construire le carré $OBAC$ dans le repère donné en annexe.

Exercice 3 : 6 points

1) Résoudre dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ le système (S) : $\begin{cases} ab=3042 \\ a\vee b=234 \\ a<b \end{cases}$, a et b sont deux entiers naturels.

2) Soit N$=8(3^{201})+2^{105}-9$

a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7.

b) En déduire que 5 est le reste de la division euclidienne de N par 7.

3) a) Enoncer le lemme de Gauss
b) Déterminer les couples (a, b) d'entiers naturels solutions de l'équation :15(a-2)=6(b+3).

4) a) Soit n et d deux entiers naturels.
Montrer que si d divise $n + 2$ et d divise $n^2 + 5n + 7$ alors d divise $n + 3$.
b) En déduire pour tout entier naturel n, $n^2 + 5n + 7$ et $n + 2$ sont premiers entre eux.
c) Déterminer alors les entiers naturels n tels que $n + 2$ divise $(n + 7)\ (n^2 + 5n + 7)$.

5) a) 2023 et 103 sont-ils premiers ? Justifier.
b) Montrer que 2023 et 103 sont premiers entre eux.
c) Montrer que 66 est le reste de la division euclidienne de 2023^{103}par 103.
d) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2023^{102}par 103.Justifier votre réponse.

Exercice 4 :6 points

I/ Soit les suites (t_n) et (v_n) définies sur IN par : $\begin{cases} t_0 = \sqrt{\frac{\pi}{4} + 4} \\ t_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}{t_n}^2 + 2} \end{cases}$ et $v_n = {t_n}^2 - 4$

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ donné en annexe, on a représenté la droite d'équation $y = x$, la courbe de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{2} + 2}$ et le point $A(\sqrt{\frac{\pi}{4} + 4}\ , 0)$.

1) a) Construire sur $(O, \vec{\imath})$ les points d'abscisses respectives t_1, t_2 et t_3.
b) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
c) Montrer que pour tout entier n, on a: $v_n = \frac{\pi}{2^{n+2}}$.
d) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n$.

2) Soit pour tout entier naturel non nul n ,la somme : $S_n = \sum_{k=o}^{n-1} (t_k)^2$
a) Montrer que $S_n = 4n + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2^{n+1}}$
b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$.

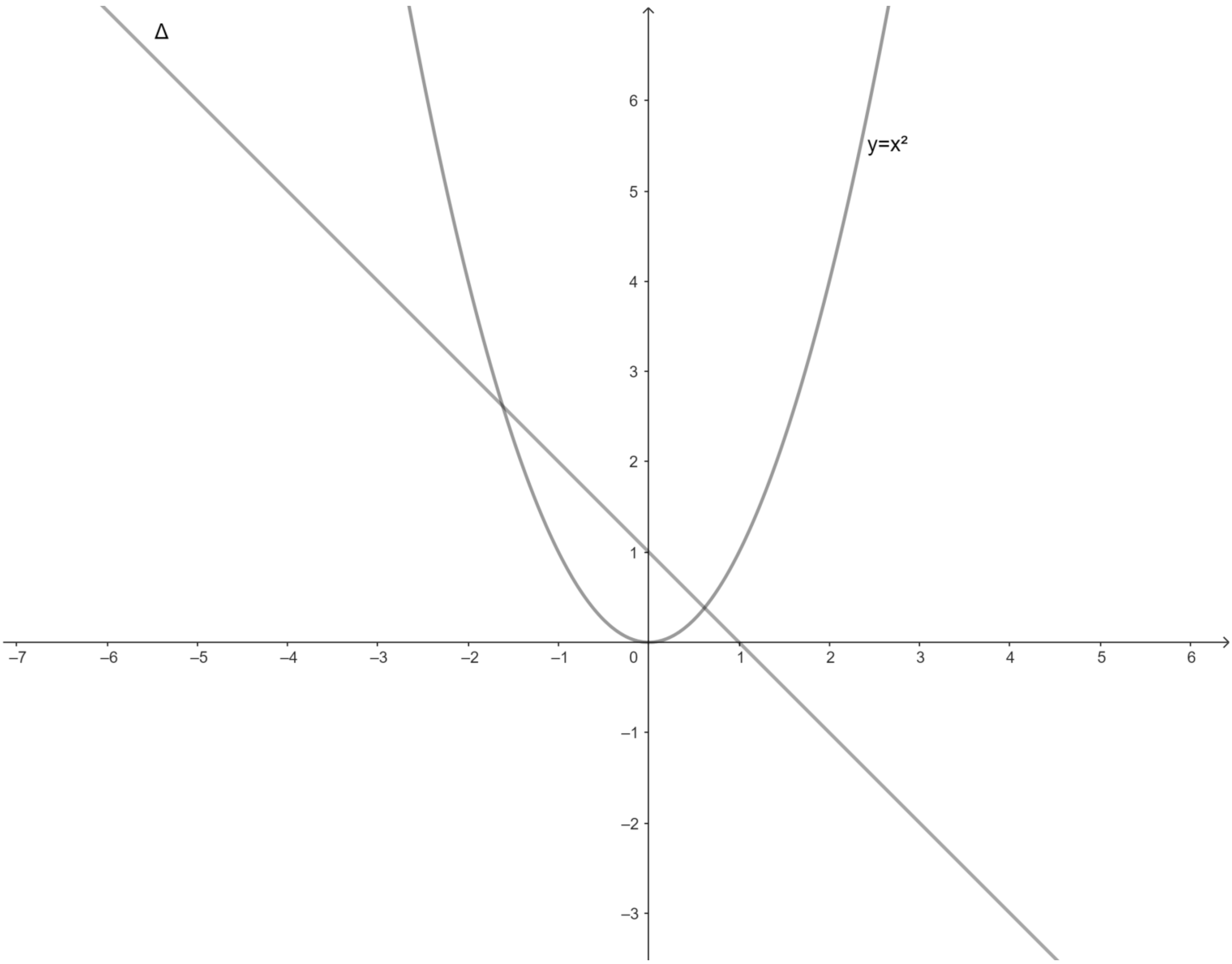
II/ On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \end{cases}$

1) Vérifier que $u_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
2) Montrer que pour tout entier n, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.
3) Vérifier que $u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{-2u_n^2 + u_n + 1}{2}$ et en déduire que la suite (u_n) est croissante.
4) a) On rappelle que pour tout réel x ,$1 + cosx = 2cos^2(\frac{x}{2})$.
Montrer, par récurrence, que pour tout entier n, on a : : u_n= cos(v_n)
b) En déduire la valeur exacte de cos $\frac{\pi}{8}$.

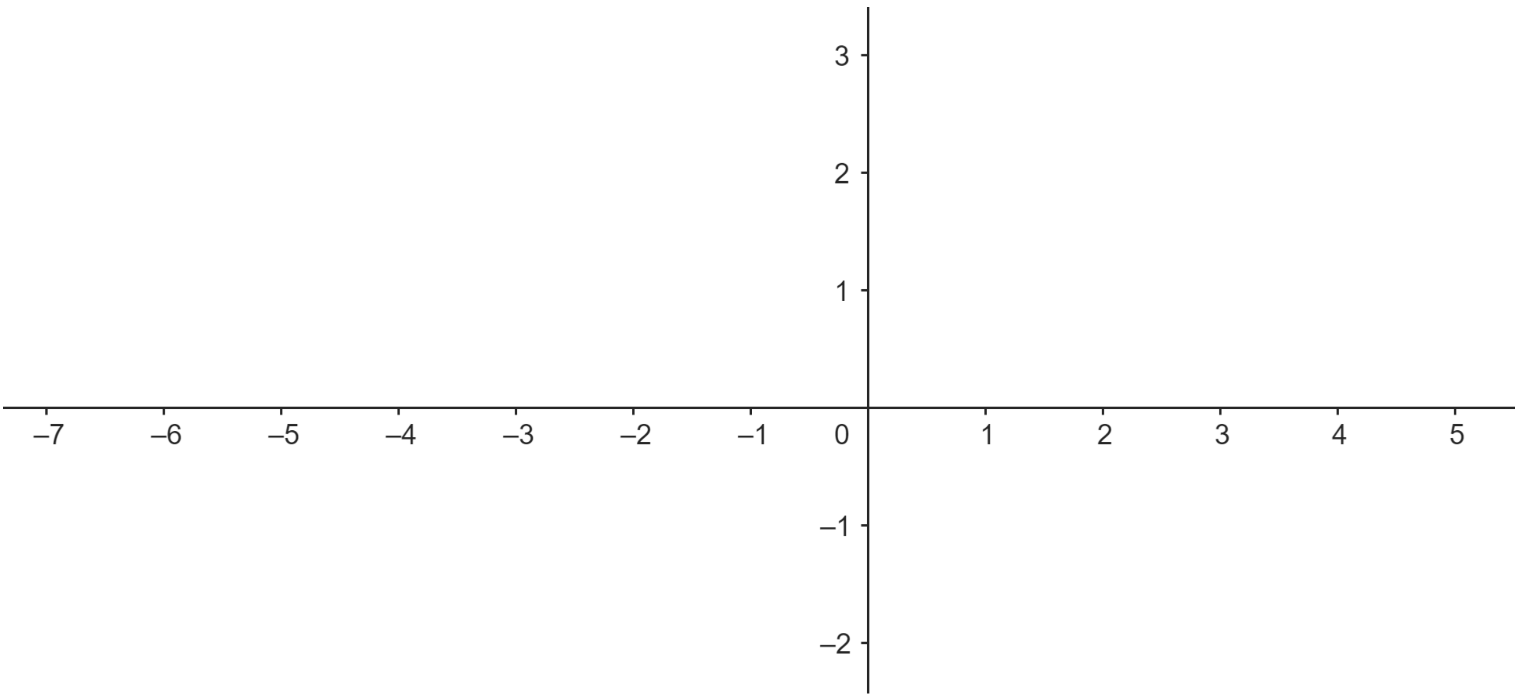
Annexe à rendre avec la copie

Nom et prénom ………………………………………………………………………………

Exercice 1



Exercice 2



Exercice 4 :