Ministère de l'éducation	**Devoir de Synthèse n°2 *Régional***
Commissariat régional de l'éducation de Monastir	**$2^{éme}$ année Sciences**
Epreuve : MATHEMATIQUES	**Durée :2H** **Date :13/03/2024**

Le sujet comporte **4 exercices** et une annexe **à rendre** avec la copie

Exercice 1 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$.

1) a) Calculer $f(4)$ et $f(-4)$

b) En déduire que la fonction f n'est ni paire ni impaire.

c) Déterminer les antécédents de 0 par f .

2) a) Vérifier que pour tout réel x , $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2$.

b) Montrer que f est décroissante sur $]-\infty, 2]$ et qu'elle est croissante sur $[2, +\infty[$

c) Montrer que -2 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{3}{2}x + 3$ et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = |g(x)|$ .On désigne par Δ la droite qui représente graphiquement la fonction g dans le même repère$(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer par le calcul que (C_f) et Δ se coupent uniquement aux points $A(-2, 6)$ et $B\left(3, -\frac{3}{2}\right)$

b) Tracer Δ et la représentation graphique de la fonction h dans l'annexe.

4) a) Résoudre graphiquement dans IR l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

b) Déterminer graphiquement l'ensemble des réels x tels que $0 \leq f(x) \leq h(x)$.

Exercice 2 (4 points)

Pour tout réel x de $[0,\pi]$, on considère l'expression $k(x) = 2\cos^2 x - \sin x - 1 + 4x$

1) Calculer $k(0)$, $k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $k\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

2) a) Montrer que pour tout $x \in [0,\pi]$, $k(\pi - x) - k(x) = 4\pi - 8x$

b) Montrer alors que $k\left(\frac{7\pi}{8}\right) + k\left(\frac{5\pi}{8}\right) - k\left(\frac{\pi}{8}\right) - k\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 4\pi$

3)a) Montrer que pour tout $x \in [0,\pi]$, $2\cos^2 x - \sin x - 1 = -2(\sin x + 1)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)$

b) Résoudre alors dans $[0,\pi]$, l'équation : $k(x) = 4x$

Exercice 3 (5,5 points)

Soit (U_n) la suite arithmétique de raison r telle que $U_4 = 9$ et $U_{12} = 25$.

1) a) Montrer que $r = 2$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2n + 1$.

c) Calculer la somme $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_{12}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on donne la somme $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_{\mathbf{2n}}$.

a) Vérifier que $S_1 = 9$ et que $S_2 = 25$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = (2n + 1)^2$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$ .Déterminer l'entier naturel p tel que $S_n = U_P$.

3) On considère la suite(V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = 5^{U_n}$.

a) Vérifier que $V_0 = 5$ et que $V_1 = 125$.

b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 25 .

4) Soit l'entier naturel $N = 5 + 5^3 + 5^5 + \cdots + 5^{2021} + 5^{2023}$.

a) Montrer que $N = \dfrac{5(5^{2024} - 1)}{24}$

.

b) En déduire que le reste de la division euclidienne de 5^{2025} par 3 est égal à 2

Exercice 4 (5,5 points)

Dans la figure ci-dessous, ACB désigne un triangle rectangle et isocèle en C de sens indirect, O est le milieu du segment [AB] et I un point du segment [OC] distinct de O et de C.

Soit **R** la rotation **indirecte** de centre **O** et **d'angle** $\frac{\pi}{2}$

1) a) Justifier que R(A)=C et que R(C)=B.

b) Déterminer alors l'image de la droite (AC) par R

c) Montrer que R((OC)) =(AB).

2)La droite Δ passant par C et perpendiculaire à (AI) coupe (AB) en J.

a) Montrer que R((AI)) =Δ.

b) Déduire que le triangle 0IJ est rectangle et isocèle en O.

3) Soient **(**$\mathscr{C}$**)** et **(**$\mathscr{C}$ **')** les cercles de diamètres respectifs [AC] et [BC]

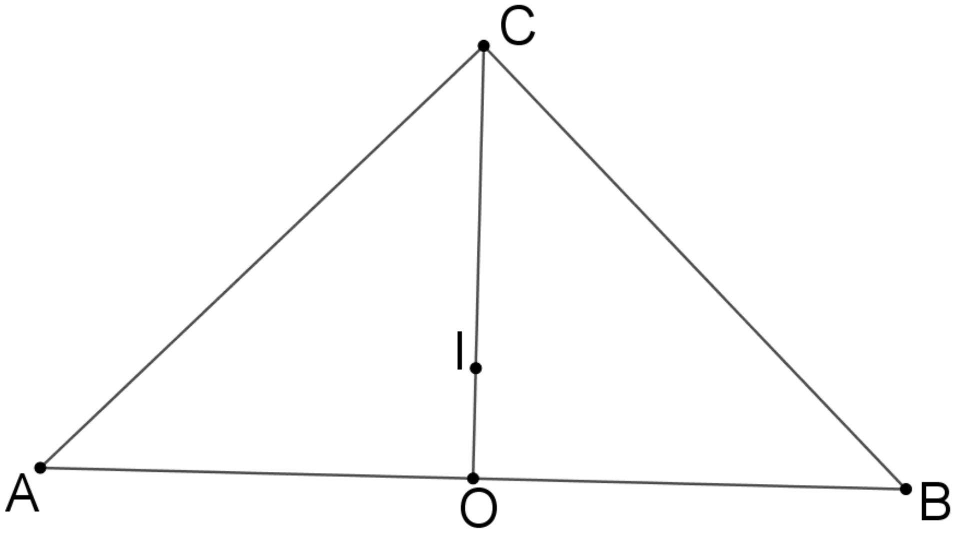
Montrer que **(**$\mathscr{C}$ **')** est l'image de **(**$\mathscr{C}$**)** par R.

4) On désigne par E le point d'intersection de Δ et (AI), et par F le deuxième point d'intersection de Δ et de **(**$\mathscr{C}$ **')** .

a) Justifier que E appartient au cercle **(**$\mathscr{C}$**).**

b) Déduire que R(E)=F.

c) Déterminer l'image du cercle circonscrit au triangle OIJ par la rotation R**.**



Annexe à rendre

Nom……………………………………………………Prénom……………………………………………