$\boldsymbol{Exercice: 1}$ **(5pts)**

Dans un repère orthonormé, on a tracé C_f et C_g les courbes respectives des deux fonctions f et g qui sont définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$*$ C_f coupe l'axe des abscisses en trois points : A$(-\frac{3}{2},0)$; B$(-\frac{1}{3},0)$ et C$(\frac{17}{9},0)$

$**$ C_f et C_g se coupent en trois points : A'$(-\sqrt{2},\frac{1}{2})$; B$(-\frac{1}{3},0)$ et C'$(2,1)$.

En utilisant ces deux courbes répondre aux questions suivantes (sans justification):

1°]] $f(-2) = \cdots$; $g(-\sqrt{2}) = \cdots$

Les antécédents de 0 par f sont :……………………………..

2°]] Donner la parité de g puis de f : g est …………….. ; f est……………………

3°]] Donner le tableau de signes de f ……………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

4°]] Donner (dans un tableau) les variations de f ……………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

5°]] Donner le domaine de définition de la fonction h où $h(x) = \sqrt{f(x) - 1}$

……………………………………………………

6°]] L'ensemble des solutions de l'inéquation : $f(x) \leq g(x)$ est……………………….

7°]] **Si** $x \in [0, \pi]$ **Alors** $\ldots \leq f(\sin x) \leq \cdots$

$\boxed{Exercice : 2}$ **(5pts)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 100$ et $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 400$.

1°]] a) Calculer u_1 et u_2.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

Si $u_n \in [0; 2000]$ **Alors** $u_{n+1} \in [0; 2000]$.

2°]] Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - 2000$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont-on précisera la raison et son premier terme.

b) Exprimer $v_n$en fonction de n puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_n = -1900 \times (0{,}8)^n + 2000.$$

3°]] a) Comparer u_n et u_{n+1} où $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculer la somme : $\sum_{k=5}^{k=14} u_k$.

4°]] En 2023, ZEINEB compte 100 abonnés à son profil (instagram).

Sachant que chaque année, elle perd 20% de ses abonnés auxquels s'ajoutent 400 nouveaux abonnés, la mère de ZEINEB souhaite que le nombre d'abonnés n'atteigne pas 2000.

a) Calculer le nombre d'abonnés en 2024 puis en 2025.

b) Déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 1800.

c) Le souhait de la mère de ZEINEB est-il possible ? Justifier.

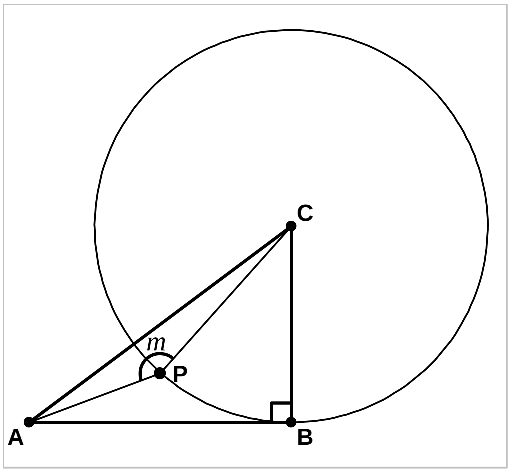
$\boxed{\boldsymbol{Exercice: 3}}$ **(5pts)**

1°⟧ Soit t un réel strictement positif.

a) Montrer que : $t^5 - t^4 - 1 = (t^2 - t + 1)(t^3 - t - 1)$.

b) En déduire que : $t^5 - t^4 - 1 = 0 \iff t^3 = t + 1$

2°⟧ Dans la figure ci-contre, la droite (AB) est tangente au cercle C en B et P un point du cercle C (comme indique la figure).



On donne : AP$= x > 0$, BC $= 1$,

AB $= x^2$, AC $= \sqrt{x^5}$ et $\widehat{APC} = m$

a) Montrer que : $x^5 = x^4 + 1$.

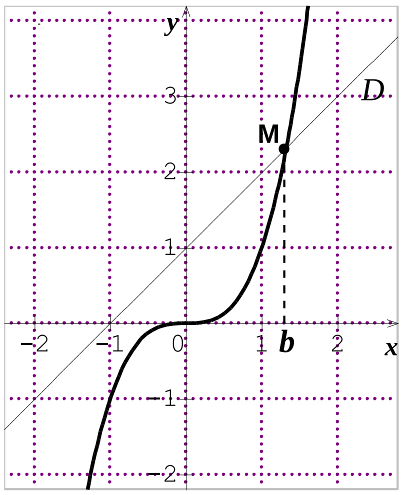
b) Exprimer AC en fonction de : AP , PC et $\cos m$

c) Déduire que : $m = \frac{2\pi}{3}$

d) Calculer alors l'aire du triangle APC en fonction de x ainsi que le rayon de son cercle circonscrit.

3°⟧ Le point P peut-il être le centre de gravité du triangle ABC ? Justifier.

4°⟧ On a représenté sur la figure ci-contre :



la droite D : $y = x + 1$ et φ_f la représentation graphique d'une fonction f où $f(x) = x^3$.

D et φ_f se coupe au point M d'abscisse $\boldsymbol{b}$.

a) Montrer que : $b^5 - 1 = b^4$.

b) Montrer que :

Si $b = tan^2\, a$ **Alors** $sin^2(\frac{\pi}{2} - a) = sin^3 a$.

$\boxed{Exercice: 4}$ **(5pts)**

Soit $f(x) = \frac{10x}{1+x^2}$ et φ_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1°⟧ Donner le domaine de définition de f puis étudier sa parité.

2°⟧ a) Montrer que pour tout $x \epsilon [0, +\infty[$ on a : $0 \leq f(x) \leq 5$

b) En déduire que le maximum et le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

3°⟧ a) Vérifier que pour tous réels positifs a et b tels que $a \neq b$ on a :

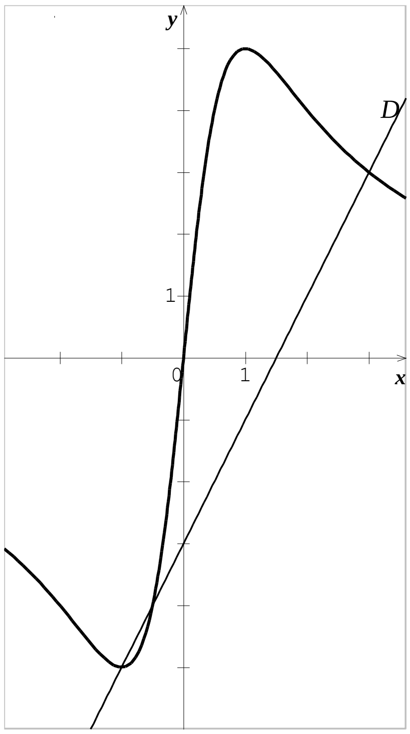
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{10(1 - ab)}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)}$$

b) Déterminer alors les variations de f sur $[0,1]$ puis sur $[1, +\infty[$.

4°⟧ Soit $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$.

a) Sachant que (-1) est une racine de P, factoriser $P(x)$.

b) En déduire les coordonnées des points d'intersections de la courbe φ_f et la droite D : $y = 2x - 3$.



5°⟧ Dans la figure ci-contre on a représenté φ_f et D.

a) Résoudre graphiquement : $f(x) < 2x - 3$

b) Soit $g(x) = \frac{-10|x|}{1+x^2}$

Etudier la parité de g.

c) Construire la courbe φ_g à partir de celle de f.