Lycée secondaire Bir Ali-2	Devoir de synthèse N°2		Classes : $2^{ème}$ Sciences (2&3)
Date : 12 / 03 / 2024	Mathématiques	Coefficient : 4	Durée : 2 h

Noter bien : • Il sera tenu compte de la rigueur et de la clarté des réponses.
• Aucun document n'est autorisé, sauf, une calculatrice non programmable.

Exercice N°1: (5 points).

On considère la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+2a_n}$ pour tout $n \geq 0$

1 a) Calculer les termes a_1 et a_2

b) Justifier que la suite (a_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2 On admet que tous les termes de la suite (a_n) sont non nuls, et on pose $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ où $n \geq 0$

a) Prouver que la suite (b_n) est arithmétique de raison $r = 2$ et donner son premier terme.

b) Exprimer le terme général b_n en fonction de n

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $c_n = (-2)^{b_n}$

a) Montrer que (c_n) est une suite géométrique de raison $q = 4$

b) Exprimer le terme général c_n en fonction de n

4 Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = (-2)^{b_1} \times (-2)^{b_2} \times ... \times (-2)^{b_n}$
Exprimer S_n en fonction de n

Exercice N°2: (4 points).

► Dans l'annexe ci-jointe (fig-1), on donne un triangle ABC direct isocèle et rectangle en A et on note O le milieu du côté $[BC]$

1 Construire le point B' image de B par la rotation directe r de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$

2 Soit h l'homothétie de centre A qui transforme O en B'

a) Déterminer le rapport k de l'homothétie h

b) Construire le point C' image de C par h

c) Préciser la nature du triangle $AB'C'$

3 Soit O' le projeté orthogonal de B' sur (AC)

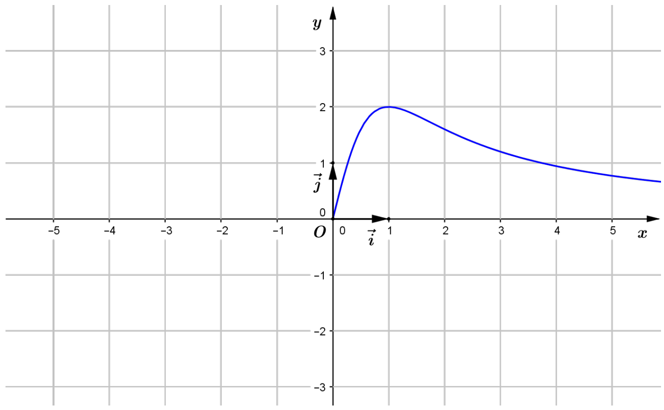
a) Montrer que $r(O) = O'$

b) Préciser alors l'image de la droite (BC) par r

Exercice N°3: (5 points).

▶ **(I)** Soit g une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$ par le tracé de la partie de sa courbe sur $\mathbb{R}_+$

1. Compléter le traçage de cette courbe sur $\mathbb{R}_-$ à l'annexe ci-jointe (fig-2) à la page 3/3



2. Déterminer les images de 0 , 1 et -1 par g

3. Donner le nombre d'antécédents de 1 par g

▶ **(II)** Soient a et b deux réels.

1. (a) Montrer que si $0 \leq a \leq 1$ et $0 \leq b \leq 1$ alors $1 - ab \geq 0$
   (b) Prouver que si $a > 1$ et $b > 1$ alors $1 - ab < 0$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{4x}{1+x^2}$
   (a) Montrer que $f(a) - f(b) = (a-b)(1-ab)\dfrac{4}{(1+a^2)(1+b^2)}$
   (b) En déduire le sens de variation de f sur chacun des intervalles $[0;1]$ et $]1,+\infty[$
   (c) Calculer $f(1)$ et montrer que $f(x) - 2 \leq 0$. Que peut-on en conclure ?
   (d) Etudier la parité de f puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$

Exercice N°4: (6 points).

Pour tout réel $x \in [0, \pi]$, on pose : $f(x) = 2\cos^2 x + \sin x \cos x - \dfrac{3}{2}$

1. Calculer $f(0)$, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

2. (a) Montrer que pour tout réel $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a : $f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + f(\pi - x) = -1$
   (b) En déduire $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$

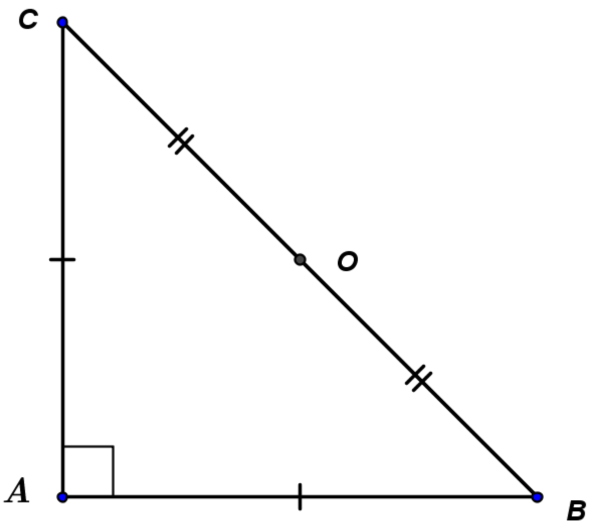
3. Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation : $f(x) = \sin x \cos x$

4. (a) Montrer que pour tout réel $x \in [0, \pi] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ on a : $f(x) = \dfrac{-3\tan^2 x + 2\tan x + 1}{2(1+\tan^2 x)}$
   (b) Calculer $f(\alpha)$ sachant que $\tan \alpha = -\dfrac{1}{3}$ et $\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$
   (c) Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation : $f(x) = 0$

Annexe à rendre avec la copie

Nom et prénom : .... **Classe :** $2Sc$..... **N° :** ....

► fig-1 :



► fig-2 :