Lycée : Mohamed Ali -Sfax Profs : Fourati Ali Derbel Louati Nada	**Devoir de synthèse N°2** *Épreuve: Mathématiques*	Date : 15/03/2024 Durée : 2 h Classe: 2ème Sc 5 + 6

Exercice 1 : (6pts)

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = (-2)^n - 2n + 1$

1) **a-** *Calculer* u_0 ; u_1 *et* u_2

b- *Justifier que la suite* (u_n) *n'est ni arithmétique ni géométrique.*

2) *Soit la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $v_n = u_n + 2n - 1$

a- *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $q = -2$ *et de premier terme* 1

b- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on donne* $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. *Montrer que* $S_n = \frac{1}{3}(1-(-2)^{n+1})$

3) *Soit la suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $w_n = u_n - v_n$

a- *Montrer que* (w_n) *est une suite arithmétique de raison* $r = -2$ *et de premier terme* 1

b- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on donne* $S'_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$. *Montrer que* $S'_n = 1 - n^2$.

4) *Calculer la somme* $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_8$

Exercice 2 : (6pts)

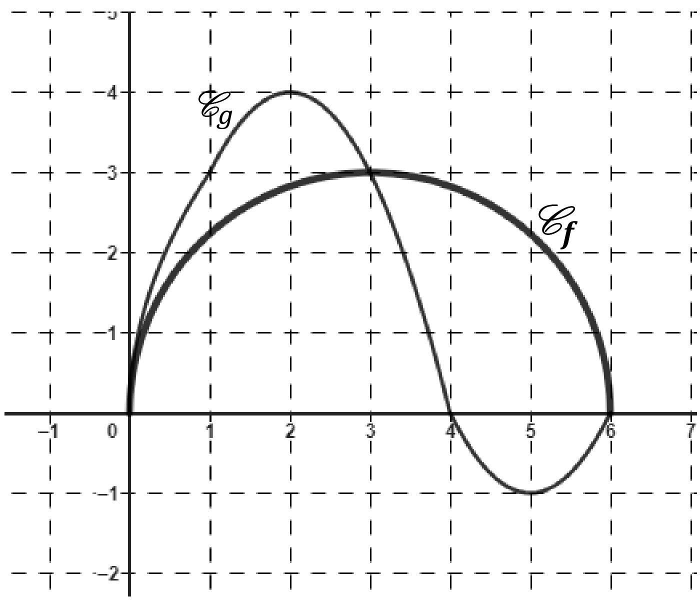
Soit la fonctions f *définie par* $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x}$ *et* $\mathscr{C}_f$ *sa courbe dans un repère orthonormé*

1) *Déterminer* D_f *l'ensemble de définition de* f

2) **a-** *Montrer que pour tout* $x \in D_f$;*on a :* $f(x) = \sqrt{-(x-3)^2 + 9}$

b- *Etudier les variations de* f *sur les deux intervalles* $[0;3]$ *et* $[3;6]$

3) *Montrer que* $f(3)$ *est un maximum de* f.



4) *La figure ci-contre est la courbe* $\mathscr{C}_f$ *de* f *la courbe* $\mathscr{C}_g$ *d'une fonction* g *définie sur l'intervalle* $[0;6]$

a- *Déterminer les extrémum de* g

b- *Déterminer le sens de variation de* g *sur l'intervalle* $[2;5]$

c- *Comparer* $g(2{,}9)$ *et* $g(3{,}1)$.

5) *Résoudre, graphiquement, les équations suivantes :*

a- $g(x) = 3$

b- $f(x) = g(x)$

6) *Résoudre, graphiquement, les inéquations suivantes :*

a- $g(x) < 0$

b- $f(x) \leq g(x)$

Exercice 3 : (4pts)

Pour tout $x \in [0\,;\pi]$ *on donne* $f(x) = -2\cos^2 x - 3\sin x + 3$

1) *Calculer* $f(0)$ *et* $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

2) ***a-*** *Exprimer* $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ *en fonction de* $\cos x$ *et* $\sin x$

b- *Montrer que* $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f(x) = 4 - 3(\cos x + \sin x)$

c- *En déduire* $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ *et* $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

3) ***a-*** *Montrer que pour tout* $x \in [0\,;\pi]$ *on a :* $f(x) = 2\sin^2 x - 3\sin x + 1$.

b- *Résoudre dans* $[0\,;\pi]$ *les deux équations :* $f(x) = 0$ *et* $f(x) = 1$.

Exercice 4 : (4pts)

Soit M un point du demi-cercle trigonométrique (de centre O, de rayon 1 et de diamètre $[AA']$ *) telque* $\widehat{AOM} = \frac{3\pi}{4}$. *H le projeté orthogonal de M sur l'axe (AA')*

1) ***a-*** *Montrer que* $MH = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $A'H = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

b- *Justifier que :* $\widehat{AA'M} = \frac{3\pi}{8}$ *et montrer que* $\tan\frac{3\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$

c- *En déduire que* $\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ *puis* $\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

2) *Calculer, alors,* $\cos\frac{5\pi}{8}$ *et* $\sin\frac{5\pi}{8}$