2 $Sc_{1\ et\ 2}$ **Devoir de synthèse n°2** **16/03/2024**

L.Sayada **Epreuve de mathématiques** **Durée : 2 heures**

Exercice 1 (6 points)

Dans l'annexe, ci-jointe, on a tracé la représentation graphique (C_f) d'une fonction f définie sur IR dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Par une lecture graphique :

1) a) Préciser f(-2) et f(7).

b) Résoudre dans IR, l'équation f(x)= -3 et l'inéquation f(x)≤3.

c) Compléter, dans le même annexe, le tableau de signe de f(x) lorsque x varie dans IR puis comparer f(-3 ,14) et f(2,718).

d) Déterminer, suivant les valeurs du réel m, le nombre N(m) des solutions de l'équation f(x)=m.(Répondre sur le tableau du même annexe)

2) a) Donner le tableau de variation de f sur l'intervalle [-3, 7].

b) Soit a et b deux réels de [4,+∞[tels que a<b ; comparer $f(\frac{1}{a})$ et $f(\frac{1}{b})$.

3) Préciser le minimum et le maximum de f sur l'intervalle [-1, 5].

4) Soit g la fonction définie sur IR par g(x)=f(|x|).

a) Montrer que g est paire et que g(x)=f(x) pour tout x ϵ [0,+∞[.

b) Tracer alors, la courbe (C_g) à partir de (C_f).

Exercice 2 (4 points)

Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{8u_n - 3}{u_n + 4} ; n \,\epsilon IN \end{cases}$

1) a) Calculer u_1 et u_2.

b) Justifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Soit la suite (v_n) définie sur IN par : $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 1}$ *; $n \,\epsilon IN$.*

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison q et son premier terme v_0.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Calculer, en fonction de n, la somme $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$.

Exercice 3 (4 points)

On considère un rectangle direct ABCD tel que AB= 2 AD, K le symétrique de D par rapport à A. I, J, O et O' les milieux respectifs des segments [AB],[CD], [BJ] et [AJ]. Soit R la rotation directe de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) a) Justifier que R(B)= J et R(J)=A.

b) En déduire que R(O)= O' puis préciser la nature du triangle IOO'.

2) a) Déterminer R((BC)) et R((JC)) puis déduire R(C)=D.

b) Montrer que R(D)=K.

3) Soit $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ les cercles de diamètres respectifs [BJ] et [AJ].

(BD) recoupe $(\mathcal{C})$ en M et (JK) recoupe $(\mathcal{C}')$ en N.

a) Justifier que l'image de $(\mathcal{C})$ par R est le cercle $(\mathcal{C}')$.

b) Montrer que R(M)= N.

Exercice 4 (6 points) ***Les questions 1), 2) et 3) sont indépendantes.***

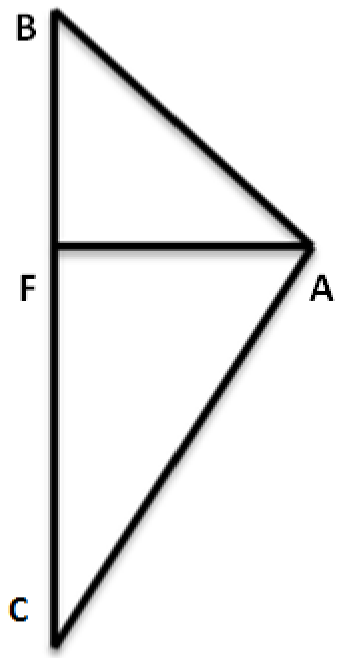
1) Soit A=$\cos^2(\frac{\pi}{9}) + \cos^2(\frac{7\pi}{18}) + \cos^2(\frac{11\pi}{18}) + \cos^2(\frac{8\pi}{9})$

et B=$\sin^2(\frac{\pi}{9}) + \sin^2(\frac{7\pi}{18}) + \sin^2(\frac{11\pi}{18}) + \sin^2(\frac{8\pi}{9})$.

Calculer A+B, justifier que A=2 puis déduire la valeur de B.

2) Résoudre dans IR, l'équation : $4\cos^2x - 2(1+\sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} = 0$.

3) Soit ABC un triangle et F $\in$ [BC] tels que AF=4, AC=8, AB=$4\sqrt{2}$, $\widehat{FAB}=\frac{\pi}{4}$ et $\widehat{FAC}=\frac{\pi}{3}$.



a) Calculer BF et CF puis déduire que BC=$4(1+\sqrt{3})$.

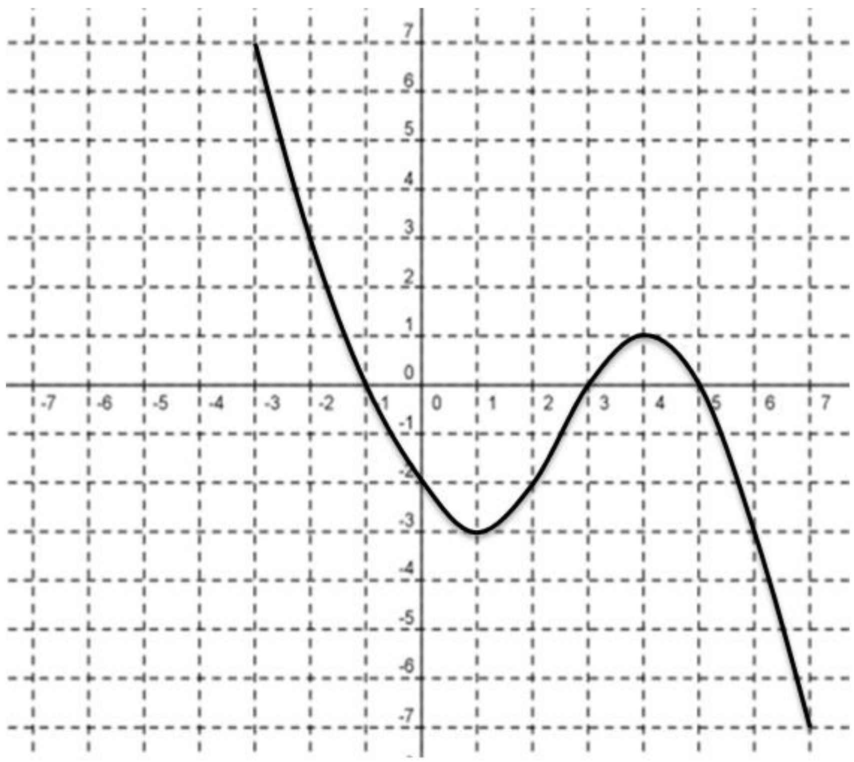
b) Justifier que F est le projeté orthogonal de A sur (BC) et que $\widehat{ACB}=\frac{\pi}{6}$.

c) En utilisant la loi de sinus dans le triangle ABC, montrer que $\sin(\frac{7\pi}{12})=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Feuille annexe à rendre

Exercice 1

(C_f)



1) c)

x	$-\infty$	...	...	...	$+\infty$
f(x)					

d)

m	$-\infty$	.....	.....	$+\infty$
N(m)				

Exercice 3