⋄⋄⋄ **Prof :Douma Ali** ⋄⋄⋄			**A.S. : 2023/2024**
Lycée:Ghraiba	**4ème Sc 1 et 2**	**Date: 14/12/2023**	**Durée : 2h**

Devoir Synthèse n°1

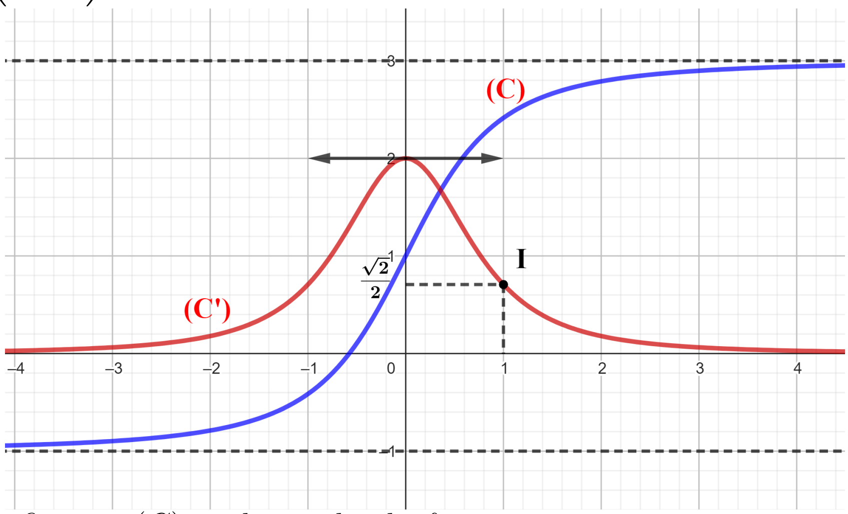
Exercice N 1 (7 points)

Soit f une fonction définie, continue et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne dans le graphique ci-dessous la représentation graphique dans un repère orthonormé direct les deux courbes (C) et (C') de la fonction f et celle de sa fonction dérivée f' . Notons que:

• Les droites $y=-1$ et $y=3$ sont des asymptotes de (C) et la droite $y=0$ est asymptote de (C') .

• La courbe (C) n'admet aucune tangente horizontale et la courbe (C') admet une seule tangente horizontale.

• Le point $I\left(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ appartient à (C') .



1 a) Justifier que (C) est la courbe de f .

b) Déterminer $f'(0)$; $f''(0)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3-f(x)}$

c) Montre que le point $A(0,1)$ est un point d'inflexion de la courbe (C) .

d) Donner une équation de la tangente (T) à (C) en A.

2 a) Déterminer $f'([1,+\infty[)$.

b) En déduire que pour tout $x\in[1,3]$, $|f'(x)|\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3 a) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution $\alpha\in]2,3[$.

b) Placer le réel α sur l'axe des abscisses (Figure N1)

4 Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que J que l'on déterminera .

a) On pose f^{-1} sa fonction réciproque.
Montrer que f^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(f^{-1})'(1)$.

b) Dresser le tableau de variation de f^{-1}

c) Tracer la courbe de f^{-1} dans l'annexe (figure N 1)

5 On considère la suite (Un) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $1 \leq U_n \leq \alpha$.

b Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}; |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|U_n - \alpha|$.

c En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}; |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$.

d Déduire que la suite U_n est convergente et calculer sa limite .

Exercice N 2(4 points)

1 On considère l'équation $(E) : z^2 - (\sqrt{2} + 2 + i\sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = 0$.

a Vérifier que 2 est une solution de (E)

b Déduire l'autre solution de (E) .

2 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$,
on considère les points A et B d'affixe respectives $z_A = 2$ et $z_B = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

a Mettre z_B sous forme exponentielle .

b Placer les deux points A et B .

3 Soit le point C d'affixe $z_C = 2 + z_B$.

a Vérifier que $OACB$ est un losange .

b Placer le point C

4 a Montrer que $1 + e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{i\frac{\pi}{8}}$.

b Déduire la forme exponentielle de z_C

c Montrer que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$

Exercice N 3(4 points)

Dans l'espace E muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$,
on donne les points $A(-3, 0, 0), B(0, 1, 1), C(-1, 1, 2)$ et $D(3, 1, 1)$

1 a Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b Déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés .

c Calculer l'aire du triangle ABC .

2 a Montrer que les points A, B, C, et D ne sont pas coplanaires .

b Soit V le volume du tétraèdre $ABCD$ .Montrer que $V = \frac{1}{2}$.

c Soit H le projeté orthogonale de D sur le plan ABC . Calculer DH

Exercice N 4(5 points)

Soit la fonction f définie sur $[2,+\infty[$ par $f(x)=x-2-\sqrt{x^2-2x}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

1) a) Étudier la dérivabilité de f à droite de 2 . Interpréter graphiquement le résultat .

   b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$. Interpréter graphiquement le résultat .

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]2,+\infty[$ et que $f'(x)=1-\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$.

   b) Montrer que f réalise une bijection de $[2,+\infty[$ sur un un intervalle J que l'on déterminera .

3) Soit f^{-1} la fonction réciproque de la fonction f

   a) Montrer que f^{-1} est dérivable à gauche en 0 et calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

   b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

   c) Tracer la courbe (C_f) de (f) et celle de f^{-1} dans le même repère (figure N2)

Annexe à rendre avec votre copie

Nom et prénom ....

Figure N°1(Exercice N°1)

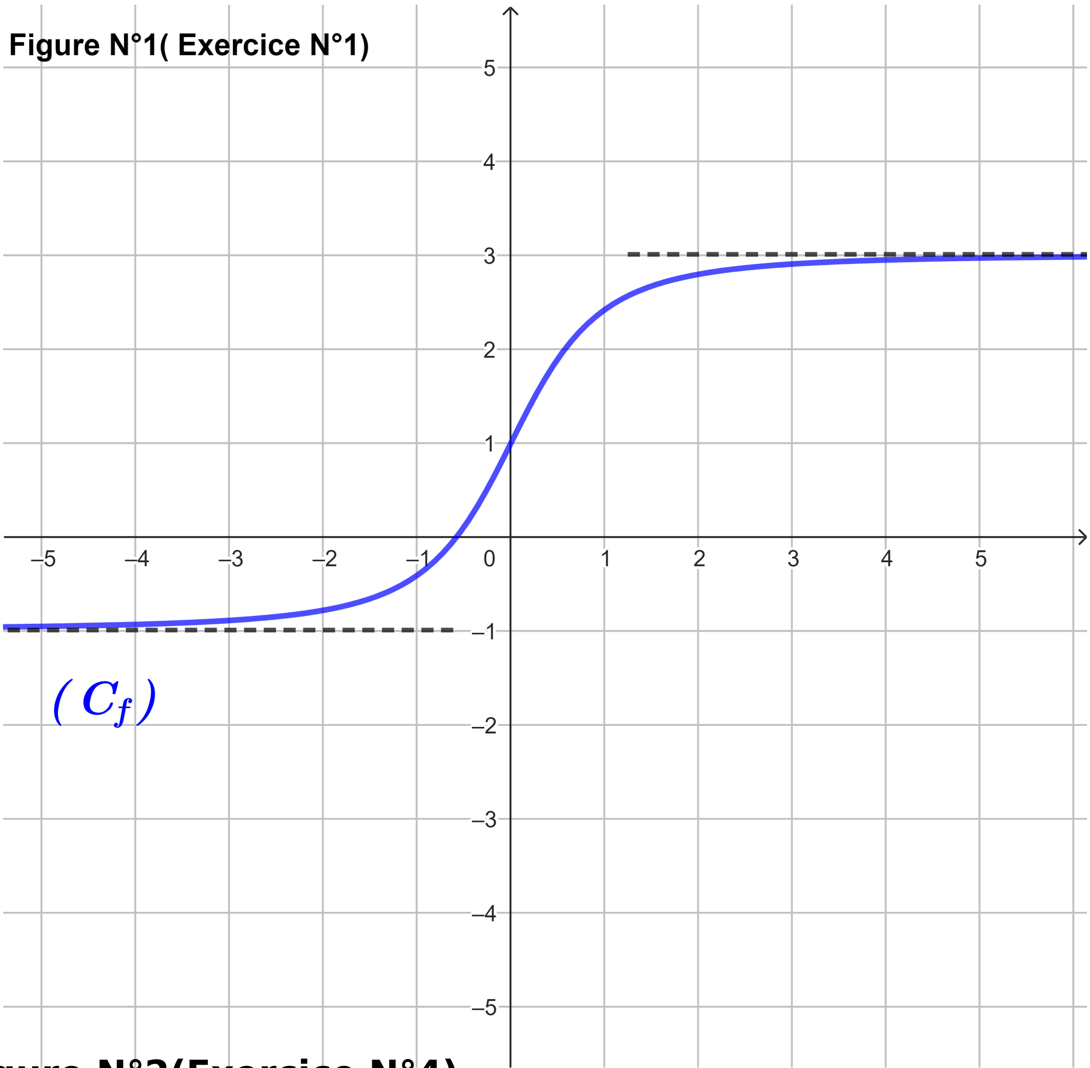


Figure N°2(Exercice N°4)