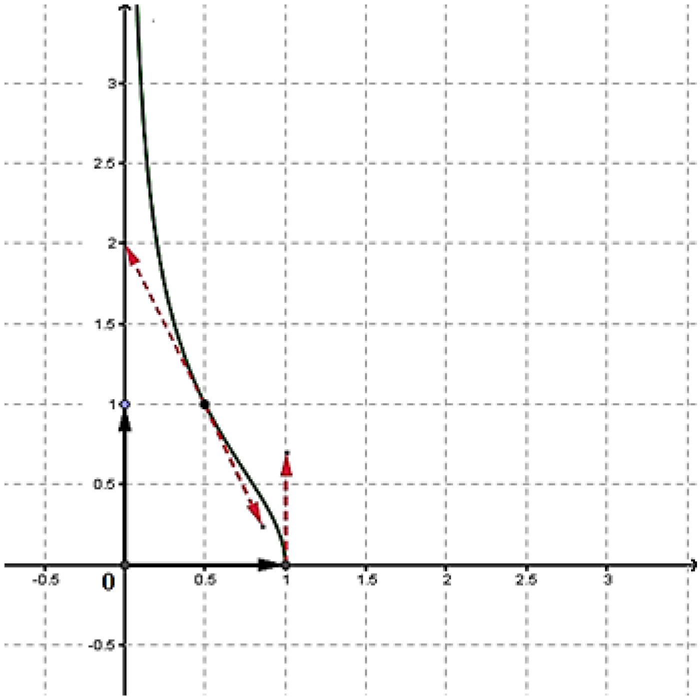
Lycée I. K. Jemmel Classe : $4^{ème}$Sc1	Devoir de Synthèse n°1 Mathématiques – Durée 2h	Mr : Afli Ahmed A.S : 2023/2024

Exercice 1 : (3 points)

Dans la figure ci-contre , on a representé la courbe (C_f) d'une fonction f continue sur]0,1] et derivable sur]0,1[ainsi que sa tangente en $\frac{1}{2}$



1) Déterminer ,par lecture graphique :

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{x-1}$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

2) a) Justifier que f réalise une bijection de]0,1] sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Construire , soigneusement, **sur l'annexe**, la courbe $(C_{f^{-1}})$ de f^{-1}

c) Montrer que f^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(f^{-1})'(1)$.

d) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en 0.

Exercice 2 : (6 points)

1) Résoudre dans ℂ l'équation $(E): \ z^2 - 2z + 1 - e^{4i\alpha} = 0.\ \ \alpha \in]0\,;\frac{\pi}{2}[$

2) Soit P(z) = $z^3 - 4z^2 + (5 - e^{4i\alpha})z - 2 + 2e^{4i\alpha}$

a) Vérifier que p(2) = 0

b) Déterminer les nombres complexes a, b et c tel que P(z) = (z - 2)($az^2 + bz + c$).

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u}\,;\vec{v})$ on considère Les points I,A,M et N d'affixes respectives :

$z_I = 1$; $z_A = 2$; $z_M = 1 + e^{2i\alpha}$ et $z_N = 1 - e^{2i\alpha}$

a) Vérifier que les points A,M et N appartiennent au cercle de centre I et de rayon 1 et que I est le milieu de [MN]

b) Montrer que : $z_M = 2\cos(\alpha)e^{i\alpha}$ et $z_N = 2\sin(\alpha)e^{i\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$

c) Vérifier que $\frac{z_M}{z_N} = i\tan(\alpha)$ puis déduire que $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON}$

d) Montrer que OMAN est un rectangle.

e) Déterminer $\alpha \in]0\,;\frac{\pi}{2}[$ pour que OMAN soit un carré puis placer les points A,M et N pour la valeur de α trouvée.

Exercice 3 : (4 points)

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,\frac{\pi}{2}[$ par : g(x) = $\sqrt{\tan(x)}$

1) Etudier la dérivabilité de g à droite en 0 et Interpréter le résultat graphiquement.

2) a) Montrer que g réalise une bijection de $[0\,;\,\frac{\pi}{2}[$ sur $[0\,;\,+\infty[$

On note g^{-1} la fonction réciproque de g.

b) Dresser le tableau de variation de g^{-1}

3) a) Calculer $g^{-1}(1)$.

b) Montrer que g^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(g^{-1})'(1)$

4) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et que $(g^{-1})'(x) = \frac{2x}{1+\,x^4}$.

Exercice 4 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur]- 2 ; 2] par f(x) = $\sqrt{\frac{2\,-\,x}{2\,+x}}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,i,j).

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 2 et interpréter graphiquement le resultat obtenu.

b) Montrer que pour tout $x\ \in\,]-2;2[$ on a: $f'(x) = \dfrac{-2}{(x+2)^2 f(x)}$

c) Montrer que pour tout $x \in [0;1]$ on a : $|f\,'(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) Montrer que l'équation f(x) = x admet une unique solution α dans $]-2;2]$

vérifier que $\alpha \in]0\,;1[$

2) a) Justifer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on pécisera.

b) Justifier, sans faire du calcul, que que f^{-1} est dérivable à droite en 0.

c) Montrer que $(f^{-1})'(\alpha) = \frac{-\alpha(\alpha+1)^2}{2}$

3) Soit la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 \ = 2 \\ U_{n+1} \ = \ f(U_n) \text{ pour tout } n \ \in \text{IN} \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n\ \in$ IN ; $0 \leq U_n \leq 1$

b) Montrer que pour tout $n\ \in$ IN ,on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}|U_n - \alpha|$

c) Déduire que pour tout $n\ \in$ IN ,on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

4) Soit $V_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$, pour tout $n\ \in$ IN.

a) Montrer que pour tout $n\ \in$ IN, on a : $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq V_n \leq f\left(\frac{1}{n^2}\right)$

b) Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

Annexe

<u>Exercice 1:</u>