Exercice 1 **(3,25 pts)**

Soit la suite réelle U définie par : $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

1) **Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq U_n \leq 3$.**
2) **Montrer que la suite U est croissante.**
3) **En déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite.**

Exercice 2 **(7 ,25 pts)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 8x + 28 & si \quad x \in]-\infty, -1[\\ f(x) = \sqrt{x^2 - x} & si \quad x \in [-1, 0] \\ f(x) = \dfrac{x^3 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x^2+1} & si \quad x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

1) **a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $|f(x)| \leq x^3$ et en déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$**

 b) Montrer que f est continue en 0

 c) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

 d) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

 e) La fonction f est-elle dérivable en 0

2) **La fonction f est-elle continue en -1 ? est-elle dérivable en – 1 ?**
3) **a) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution α dans $[1, 2]$**

 b) Vérifier que $\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3}$

 c) calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{\alpha x^{2.023} - 1974}{x^{2.023}}\right)$

4) **Soit $P(z) = 2z^3 + 7z^2 + 8z + 28$ pour $z \in \mathbb{C}$**

 a) Montrer que $P(z) = 0$ admet deux solutions imaginaires pures que l'on déterminera

 b) Trouver alors la 3éme racine de P

c) Résoudre dans $]-\infty\,,-1[$ l'équation $f(x)=0$

Exercice 3 **(6 pts)**

1) a) Calculer $(2i+1)^2$

b) Donner alors les racines carrées de $\left[4(4i-3)e^{2i\theta}\right]$ dans $\mathbb{C}$

2) Soit l'équation (E_θ) : $iz^2+2e^{i\theta}z-4(1+i)e^{2i\theta}=0$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ)

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $2e^{i\theta}$, $2e^{i\theta}(i-1)$ et $2ie^{i\theta}$

a) Montrer que $OACB$ est un parallélogramme

b) Trouver $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OC}}\right)$

c) Déduire que OAC est un triangle rectangle isocèle.

d) Calculer l'aire de OAC puis déduire l'aire du parallélogramme $OACB$

Exercice 4 **(3,5 pts)**

Les parties I et II sont indépendantes.

I) Soit pour $n\in\mathbb{N}^*$; $U_n=(-1)^n\times n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$, calculer U_{2n} et U_{2n+1} en fonction de n et déduire que la suite (U_n) n'est pas convergente.

II) Soit f la fonction dont la courbe est donnée ci-dessous

1) Trouver $f'(0)$, $f'(-2)$, $(f\ o\ f)'(-3)$, $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-1}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{f(x)-2}$ et $\lim\limits_{x\to -2}\frac{f'(x)-2}{x+2}$

2) Donner une approximation affine de $f(-2,01)$