Lycée Said Boubaker Moknine	**Niveau : $4^{éme}$sc 1**
Devoir de synthèse n°1	**Epreuve : Mathématiques**
Prof : Naija Yosra	**Durée : 2h / date: 13/12/2023**

Exercice 1 : 4 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit les points A,B ,C *et* I tels que $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = 4\vec{j}$ et $\overrightarrow{OC} = 4\vec{k}$ et I le milieu de $[AB]$.

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que $\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AC} = 4(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$

2) a) Montrer que les points $O, A, C et\ I$ ne sont pas coplanaires.

b) Calculer le volume du tétraèdre $OACI$.

c) Calculer l'aire du triangle IAC

d) Montrer alors que la distance du point O au plan (IAC) est égale à $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

3) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MB} \wedge \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI}\right) = \vec{0}$

Exercice 2 : 6 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère dans $\mathbb{C}$,l'équation $(E) : z^2 - \sqrt{2}(1-i)z - 4i = 0$

1) a) Montrer que le discriminant de (E) est $\Delta = 6(1+i)^2$.

b) En déduire les solutions z_1 et z_2 de (E) tel que $Im(z_1) > 0$

2) On considère dans $\mathbb{C}$,l'équation $(E_\theta) : z^2 - 2e^{i\theta} z + 4e^{i2\theta} = 0$ où $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.

Soit $z' = e^{i\theta}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$.

a) Vérifier que z' est une solution de (E_θ).

b) En déduire l'autre solution z'' de (E_θ) sous forme exponentielle.

c) Vérifier que pour $\theta = \frac{-\pi}{4}$, z_1 et z_2 sont les solutions de $\left(E_{-\frac{\pi}{4}}\right)$

d) Montrer alors que $z_1 = e^{i\frac{\pi}{12}}$ et déduire que $tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$

3) On donne en annexe le point A d'affixe $e^{i\frac{\pi}{12}}$ et la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^4$.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E') : z^4 = 1 + i\sqrt{3}$

b) Construire le point B d'affixe $\sqrt[4]{2}$

c) On note les points E,F,G et H les images des solutions de l'équation (E').

i) Montrer que E,F,G et H sont les sommets d'un carré inscrit dans un cercle que l'on précisera.

ii) Construire les points E,F ,G et H (En annexe).

Exercice 3 : 3 points

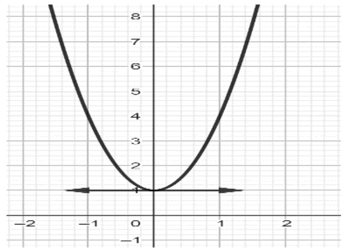
Les questions 1 et 2 de cet exercice sont indépendantes

1) Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et (C) sa courbe représentative .

On admet que le point A (0,1) est un point de (C).

On donne ci-contre la courbe de la fonction dérivée f' et sa tangente horizontale au point A.



a) Montrer que le point A est un point d'inflexion de (C).

b) Donner une équation de la tangente T à (C) au point A.

2) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{n-1}{n}$ et $v_n = \frac{n+1}{n}$ sont adjacentes.

Exercice 4 : 7 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+8} - x$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) a) Montrer que la droite $(O,\vec{\imath})$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de +∞.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + 2x$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

b) Montrer que la droite $T : 2x + 3y - 8 = 0$ est tangente à (C_f) au point A d'abscisse 1.

3) On admet que pour tout réel x,on a $f'(x) < 0$.

a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]0,+\infty[$

b) En remarquant que $f(1) = 2$,montrer que la fonction f^{-1}est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $(f^{-1})'(2) = \frac{-3}{2}$

c) On donne en annexe la courbe (C_f) ainsi que sa tangente T .

Tracer dans le même repère la courbe $(C_{f^{-1}})$ ainsi que sa tangente au point d'abscisse 2.

4) Montrer que $|f'(x)| = \frac{8}{(\sqrt{x^2+8}+x)\sqrt{x^2+8}}$ et en déduire que $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

5) Soit la suite (u_n) définie sur IN par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n)\ pour\ tout\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.(On pourra utiliser le sens de variation de f)

b) Vérifier que $f\left(\frac{\sqrt{24}}{3}\right) = \frac{\sqrt{24}}{3}$

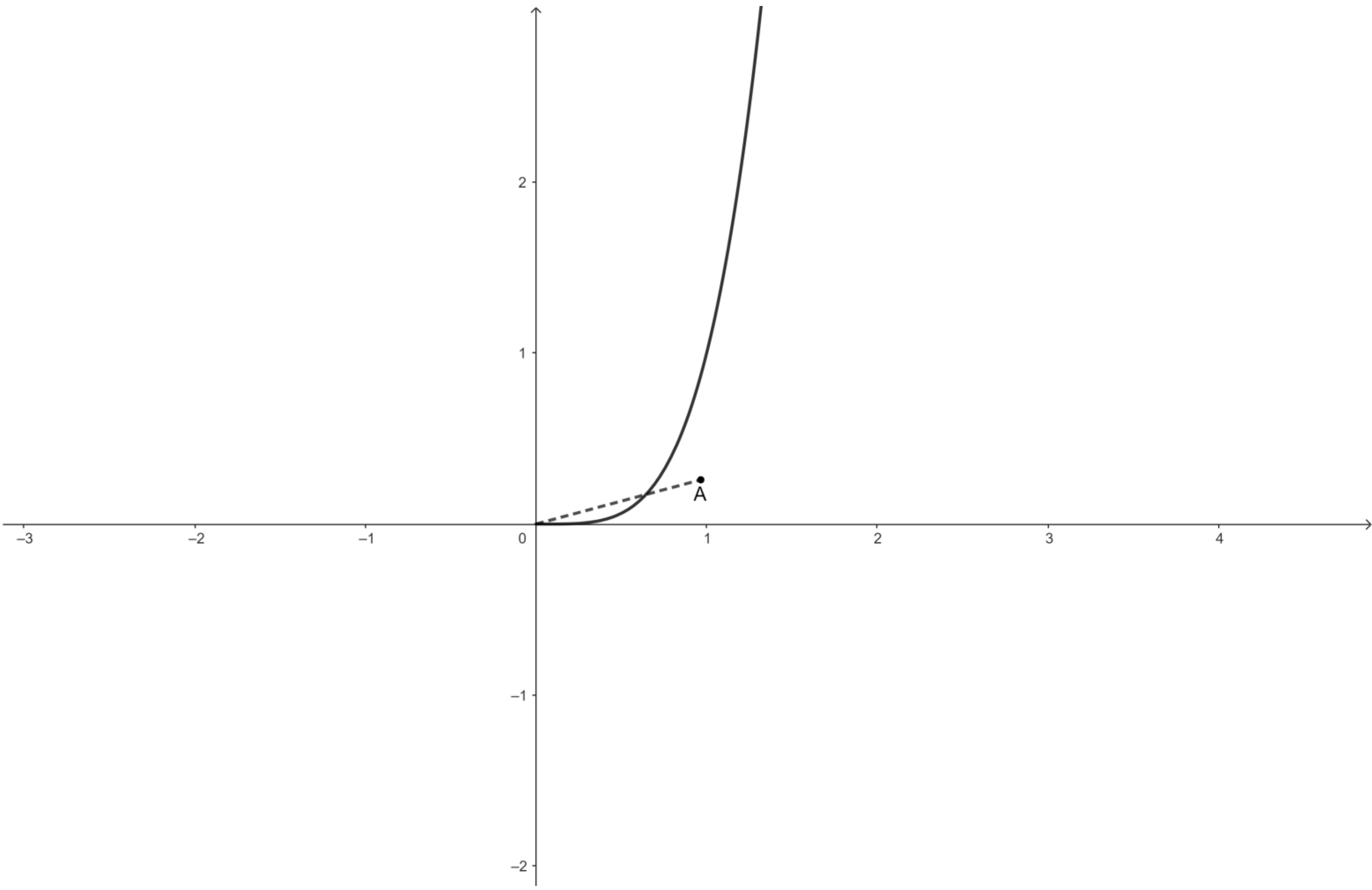
c) Montrer que pour tout $n \in$IN : $\left|U_{n+1} - \frac{\sqrt{24}}{3}\right| \leq \frac{2}{3}\left|U_n - \frac{\sqrt{24}}{3}\right|$.

d) Montrer par récurrence que : $\left|U_n - \frac{\sqrt{24}}{3}\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ puis déduire la limite de la suite (U_n).

Annexe à rendre avec la copie

Nom et prénom……………………………………….

Annexe : Exercice 2



Annexe : Exercice 4