A.S : 2024/2025 **Devoir de synthèse N°1** $4^{\text{éme}}$ S.exp

◇ **Mathématiques** ◇

الجمهورية التونسية
وزارة التربية

معهد أبو القاسم الشابي. تطاوين

الأستاذ : محمّد الحاجّي

Exercice n°1 : (04 points) (QCM)

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse proposée est exacte

Indiquer la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée

1°/ On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): (1+i)Z^2 - (1+i\sqrt{3})Z + \sqrt{3} + i = 0$

On désigne par Z_1 et Z_2 les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E)

arg (Z_1) + arg (Z_2) congru à : a) $\frac{\pi}{12}[2\pi]$; b) $-\frac{\pi}{12}[2\pi]$; c) $\frac{\pi}{3}[2\pi]$

2°/ On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E'): Z^3 = 2 + 2i$

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E') sont :

a) $Z_k = \sqrt[3]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)},\ k \in \{0, 1, 2\}$

b) $Z_k = 2\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)},\ k \in \{0, 1, 2\}$

c) $Z_k = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)},\ k \in \{0, 1, 2\}$

3°/ Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

et g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = f(\tan(x))$

La fonction g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et on a :

a) $g'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)}$; b) $g'(x) = 1 + \tan^2(x)$; c) $g'(x) = 1$

4°/ Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$; b) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$; c) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -1$

Exercice n°2 : (06 points)

I. 1) Vérifier que : $(3 - i\sqrt{3})^2 = 6 - 6i\sqrt{3}$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E): Z^2 - \left(1 + i\sqrt{3}\right)Z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$$

II. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points A, B et C d'affixes :

$$Z_A = 2, Z_B = -1 + i\sqrt{3} \text{ et } Z_C = -1 - i\sqrt{3}$$

1) Mettre Z_B et Z_C sous forme exponentielle

2) Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 2

a- Vérifier que le cercle $\mathcal{C}$ est circonscrit au triangle ABC

b- Placer le point A et construire les points B et C

3) a- Montrer que : $\frac{Z_C}{Z_B - Z_A} = \frac{Z_A}{Z_C - Z_B} = i \frac{\sqrt{3}}{3}$

b- Déduire que $(OC) \perp (AB)$ et $(OA) \perp (BC)$

c- Montrer alors que le point O est l'orthocentre du triangle ABC

4) a- Montrer que le triangle ABC est équilatéral

b-Soit H le point d'affixe $Z_H = -1$. Vérifier que H est le milieu de $[BC]$

c-Calculer alors l'aire du triangle ABC.

Exercice n°3 : (05 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

On désigne par : (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1°) a) Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat

2°) a) Montrer que $x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$

b) Dresser le tableau de variation de f sur $]0, +\infty[$

3°) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]1, 2[$

b) Vérifier que : $1,7 < \alpha < 1,8$

c) Soit Δ la droite d'équation : $y = x$.

Etudier la position de (C_f) par rapport à Δ

d) Tracer Δ et (C_f)

4°) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : : $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Montrer , par récurrence , que pour tout $n \in IN : 1 < u_n < 2$

b) Montrer que pour tout $x \geq 1 : |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

d) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n \left|\frac{3}{2} - \alpha\right|$

puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Exercice n°4 : (05 points)

On donne la courbe d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$ .voir feuille annexe

- **La tangente T à (C_f) au point $A(0,1)$ passe par $B(1,3)$**
- **$\Delta_1 : y = 3$ asymptote horizontale pour (C_f) au voisinage de $+\infty$**
- **$\Delta_2 : y = -1$asymptote horizontale pour (C_f) au voisinage de$-\infty$**

1°/ Par lecture graphique :

a) Déterminer $f(0)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

c) Déterminer $f'(0)$ et une équation de T

d) Justifier que le point $A(0,1)$ est un point d'inflexion pour(C_f)

2°/ a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J

que l'on précisera. (Soit f^{-1} la fonction réciproque de f)

b) Déterminer $f^{-1}(1)$, $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f^{-1}(x)$ et $\lim\limits_{x \to 3^-} f^{-1}(x)$

c) Tracer sur la feuille annexe la droite Δ d'équation $y = x$ et $(C_{f^{-1}})$

3°/On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$:$f(x) = a + \frac{bx}{\sqrt{x^2+1}}$, (a et b deux réels)

a) Calculer $f(0)$ puis déduire la valeur de a

b) Montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a + b$. puis déduire la valeur de b

c) Donner alors l'expression de f pour tout $x \in \mathbb{R}$

4°/ Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = x + 2\sqrt{x^2 + 1}$

Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F'(x) = f(x)$

Annexe à rendre avec la copie

Nom et Prénom : ....