◇◇◇ Lycée :Bir Lahmar et cité Ennour ◇◇◇			A.S. : 2024/2025
Mathématiques	4ème Sc exp	Le: 11/12/2024	Durée : 2h

Devoir de synthèse n° 1

Exercice N° 1 (4 points)

Dans la figure ci-jointe on a représenté dans un repère orthonormé la courbe C_f d'une fonction f définit sur $\mathbb{R}$ La courbe C_f admet :

- une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au sinage de $+\infty$
- une asymptote d'équation y = 2 au voisinage de $-\infty$
- Deux demi-tangentes au point A(0,-2) et une tangente au point B(1,-1)

1) Déterminer graphiquement
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $f_g'(0)$,$f_d'(0)$, $f'(1)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

2) Dresser le tableau de variation de f

3) soit g la restriction de f à l'intervalle $[0,+\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1}définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b) La fonction g $^{-1}$ est-elle dérivable à droite (-2) ? Déterminer $\lim\limits_{x\to-2^+} \frac{g^{-1}(x)}{x+2}$

c) Montrer que g $^{-1}$ et délivrable en (-1) et calculer $(g^{-1})'(-1)$

d) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g^{-1}(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g^{-1}(x)}{x}$

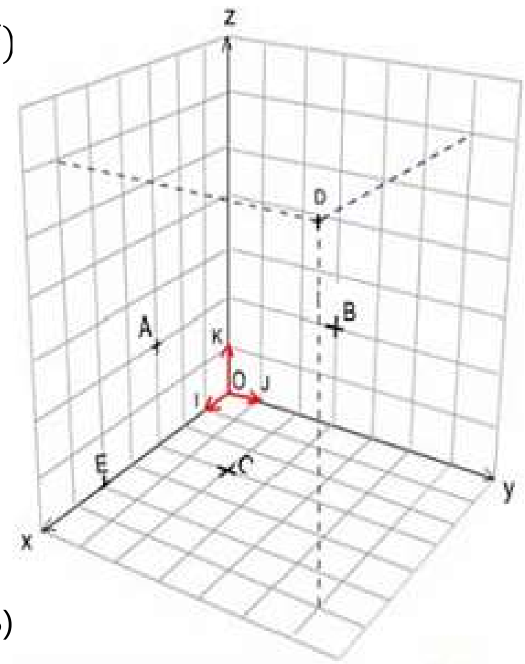
e) Tracer la courbe representative de la fonction g^{-1} sur l'annexe

Exercice N°2 (5points)

L'espace est rapporté à un repéré orthonormé direct$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Dans la figure ci contre ABCD est un tétraèdre tel que :

$\overrightarrow{OD} = 6\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}$



1) Preciser les coordonnées de chacun des points A,B et C

2) a) Vérifier que $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OD}$.

b) En déduire l'aire du triangle ABC.

c) Calculer volume de tétraèdre ABCD.

3) Soit H projeté orthogonale de D sur le plan (ABC)
Calculer DH

4) Soit F projeté orthogonale de D sur la droite (AB)

a) Calculer d (D, (AB) la distance du point D à la droite (AB)

b) Vérifier que le triangle DFH est rectangle en H et calculer FH

Exercice N°3 (5points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct$(O;\vec{U};\vec{V})$,

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation(E_θ): $Z^2-2Z+1-e^{2i\theta}=0\quad avec\ \theta\in]0,\pi[$

2) Soient les points A, M et M' d'affixes respectivement 1, $1+e^{i\theta}$ et $1-e^{i\theta}$

a) Montrer que M et M' sont symétries par rapport au point A.

b) Montrer que: $1+e^{i\theta}=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ et que $1-e^{i\theta}=-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

c) En déduire que le triangle OMM' est rectangle en O.

3) Soit N le point d'affixe (1+i)($1+e^{i\theta}$)

a) Vérifier $\frac{z_{M'}}{z_M-z_N}=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

b) Montrer alors que OM'MN est un trapèze

$\cos(2a)=2\cos^2 a-1$

$\sin(2a)=2\sin a\cos a$

c) Montrer que l'aire de ce trapèze est égale $1+\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$.

d) Déterminer la valeur de θ pour que l'aire soit maximale.

Exercice N°4 (6points)

Soit la fonction f définie sur IR par: f(x) =1+ $\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ et (φ_f) la courbe représentative dans le plan rapporte un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1) Montrer que $\lim\limits_{n\to-\infty} f(x)=-1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)=3$. Interpréter graphiquement ces résultats

2) a) Montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{(x^2+1)}^3}$

b) Dresser le tableau des variations de f.

c) Déterminer l'équation de la tangente T a la courbe (φ_f) au point d'abscisse 0

3) a) Montrer que pour tout $x\in[2;3]$;$|f'(x)|\leq\frac{2}{5\sqrt{5}}$

b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution $\alpha\in]2;3[$

4) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Expliciter l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de J

5) Soit (U_n) la suite réelle définie par: $\begin{cases}U_0=2\\U_{n+1}=f(U_n)\ \ pour\ tout\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}: 2\leq U_n\leq 3$

b) Mo ntrer que pour tout $n\in\mathbb{N}: |U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{2}{5\sqrt{5}}|U_n-\alpha|$

c) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}: |U_n-\alpha|\leq\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right)^n$

d) En déduire que (U_n) est converge et préciser sa limite

Annexe à rendre avec votre copie

Nom et prénom ....classe ....

figure 1