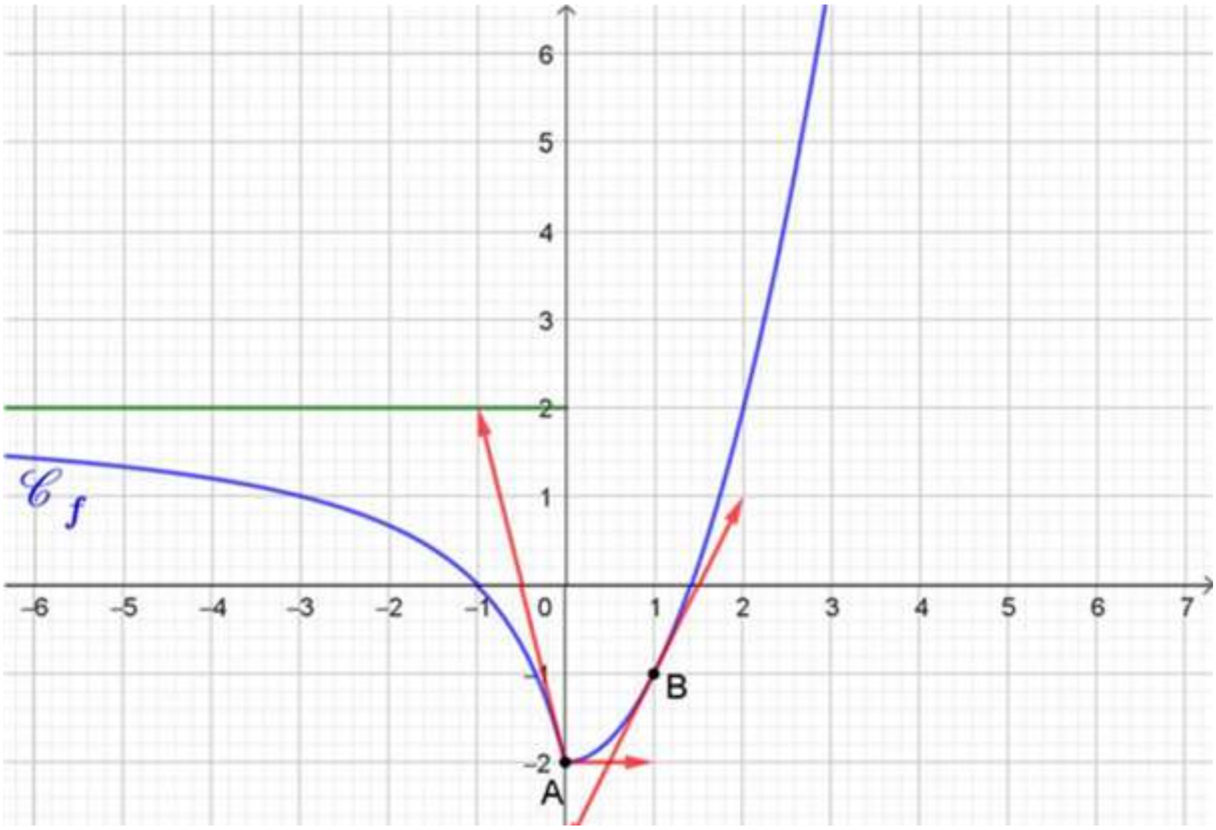
LYCEE ELHICHRIA ✧✧✧✧ DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1 MATHÈMATIQUES ✧✧✧✧	SECTION : $4^{ème}$ Sc
Durée : 2H — Date : 11/12/2024	PROF : Mr Aloui Fethi

NB : <u>Le sujet comporte 4 pages.</u>
<u>La page 4 est une annexe à rendre avec la copie.</u>

<u>Exercice n°1 : (4 pts)</u>

Dans le graphique ci-dessous ,on a représenté dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$la courbe C_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

- La droite d'équation $y = 2$ est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$
- La courbe C_f admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe $(O,\vec{j})$
- La courbe C_f admet deux demi- tangentes au point $A(0\,;-2)$ et une tangente au point $B(1\,;-1)$



1) **En utilisant les données et le graphique**
   a/ Déterminer : $f(1)$; $f'(1)$; $f'_g(0)$ et $f'_d(0)$
   b/ Déterminer : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$
   c/ Ecrire l'équation de la tangente T au point d'abscisse 1
2) Dresser le tableau de variations de f
3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$
   a/ Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera
   b/ g^{-1} est-elle dérivable à droite en (-2) ? Déterminer $\lim_{x\to(-2)^+} \frac{g^{-1}(x)}{x+2}$
   c/ Montrer que g^{-1} est dérivable en (-1) et Calculer $(g^{-1})'(-1)$
   d/ Déterminer : $\lim_{x\to+\infty} g^{-1}(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{g^{-1}(x)}{x}$

Exercice n°2 : (6 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 8} - x$

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1) a/ Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu

   b/ Montrer que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   c/Montrer que la droite $D : y = -2x$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $-\infty$

2) a/ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = -\frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 8}}$

   b/ Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

   c/ Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera

3) Montre que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[1, 2]$

4) On donne la courbe C_f de la fonction f. Ainsi que la droite D : y = x

   Construire $C_{f^{-1}}$ la courbe de f^{-1} dans le même repère.**(<u>dans l'annexe ci-jointe</u> (Figure 1))**

5) a/ Montrer que pour tout $x \in [1, 2]$ on a : $1 \leq f(x) \leq 2$

   b/ En déduire que pour tout $x \in [1, 2]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

6) On considère la suite (U_n) définie sur IN par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

   a/ Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $1 \leq U_n \leq 2$

   b/ Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |U_n - \alpha|$

   c/ En déduire que pour tout $n \in IN$ on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

   d/ En déduire $\lim_{n \to +\infty} U_n$

Exercice n°3 : (6 points)

I. Soit θ un réel dans l'intervalle $[0, 2\pi[$

   On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2[e^{i\theta} + 1 + i\sqrt{3}]z + 4(1 + i\sqrt{3})e^{i\theta} = 0$

1) Vérifier que $2e^{i\theta}$ est une solution de (E)
2) Déterminer alors l'autre solution de (E)

II. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

   On considère les points A, B et C d'affixes respectives

   $z_A = (\sqrt{6} + \sqrt{2})\, e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_B = 2 + 2i\sqrt{3}$ et $z_C = (\sqrt{3} - 1)(-1 + i)$

   Dans la **<u>figure2</u>** de l'annexe on a tracé le cercle ζ de centre O et de rayon 4 et la droite $D : y = x$

1) a/ Vérifier que $z_A = (\sqrt{3} + 1)(1 + i)$

   b/ Ecrire z_B sous forme exponentielle puis construire le point B.

2) a/ Vérifier que $\frac{z_A - z_B}{z_A} = (\sqrt{3} - 2)\, i$

   b/ En déduire que le triangle OAB est rectangle en A.

   c/ Justifier que A est le deuxième point d'intersection de la droite D et le cercle Γ de diamètre [OB]

3) Montrer que le quadrilatère OABC est un rectangle puis construire C .

4) Soit M le point d'affixe $z_M = 1 + i\sqrt{3} + 2e^{i\theta}$

   a/ Déterminer l'affixe du point I centre du cercle Γ .

   b/ calculer la distance IM . En déduire l'ensemble des points M lorsque θ varie sur $[0, 2\pi[$

   c/ Déterminer alors l'affixe du point E deuxième point d'intersection du cercle Γ avec l'axe des ordonnés

Exercice n°4: (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points A$(-3, 0, 0)$; B$(0, 1, 1)$; C$(-1, 1, 2)$ et D$(3, 1, 1)$.

1) a) Calculer les composantes du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

 b) Déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés

 c) Calculer l'aire du triangle ABC

2) a/ Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires

 b/ Montrer que le volume du tétraèdre ABCD est $v = \frac{1}{2}$

3) Soit H le projeté orthogonale de D sur le plan (ABC). Calculer DH.

Annexe

Nom et prénom: . . . . **Classe** : $4^{ème}$ Sc_1

Figure 1

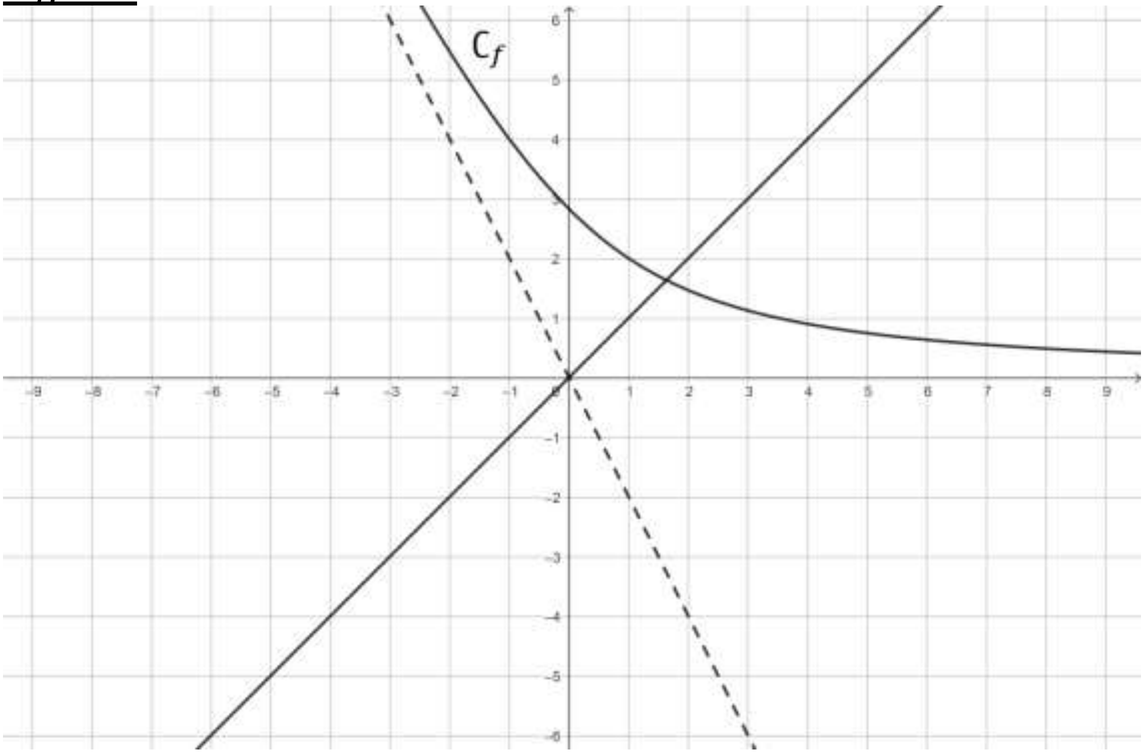


Figure 2