Délégation Régionale de l'éducation de Monastir	DEVOIR DE SYNTHÈSE N° 1	
	Épreuve : Mathématiques	Section : $4^{ème}$ sciences expérimentales
	Durée 2 H	11/ 12 / 2024

Le sujet comporte 5 pages dont les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie

Exercice 1 (6 points)

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} U_1 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{n+2}{2(n+1)} U_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $U_n > 0$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante. Déduire qu'elle est convergente.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $U_{n+1} \leq \frac{3}{4} U_n$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

c) Montrer alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.

3)

a) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \frac{n+1}{2^{n+1}}$.

b) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$.

4) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} U_k$.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $U_{k+1} - U_K = -\frac{1}{2} U_k + \frac{1}{2^{k+2}}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $S_n = \frac{3}{2} - 2U_n - \frac{1}{2^n}$.

c) Montrer alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots\ldots + \frac{n}{2^n} = 2$.

Exercice 2 (7 points)

1) Soit m un nombre complexe non nul. On considère dans $\mathbb{C}$ les équations :

$(E) : z^2 - (1+i)mz + im^2 = 0$ et $(F) : z^2 - (1+i)(\sqrt{2} - i\sqrt{3})z + 2\sqrt{6} - i = 0$.

a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = [(1-i)m]^2$.

b) Résoudre alors l'équation (E).

c) Vérifier que $i\left(\sqrt{2} - i\sqrt{3}\right)^2 = 2\sqrt{6} - i$.

d) Déduire les solutions de l'équation (F).

2) Soit le nombre complexe $a=\sqrt{2}-i\sqrt{3}$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On considère les points **A**, **B**, **S** et **P** d'affixes respectives :

$$z_A = a \ ,\ z_B = ia \ ,\ z_S = (1+i)a \ \text{ et } \ z_P = ia^2 = 2\sqrt{6}-i$$

Dans l'annexe ci-jointe (figure 1), on a construit le cercle (ζ) de centre O et de rayon $\sqrt{5}$, le cercle (ζ') de centre O et de rayon 5 et on a placé le point C d'affixe $5i$.

a) Montrer que A et B appartiennent au cercle (ζ)

b) Montrer que le triangle OAB est rectangle en O.

3) a) Montrer que le point P appartient au cercle (ζ') puis le construire.

b) Montrer que $ia^2-5i = ia(a-\bar{a})$.

c) En déduire que les droites (OB) et (PC) sont perpendiculaires.

Construire alors le point B puis le point A.

d) Montrer que le quadrilatère OASB est un carré. Construire le point S.

4) Soit θ une mesure de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{OA}\right)$.

a) Justifier que $a=\sqrt{5}\,e^{i\theta}$.

b) Donner la forme exponentielle de $1+i$; $(1+i)a$ et ia^2.

c) En déduire que $[OS)$ est la bissectrice de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{OP}\right)$.

Exercice 3 (7 points)

On donne ci-dessous, le tableau de variation de la bijection g continue sur $\mathbb{R}$ et définie par $g(x)=-1+\dfrac{x}{\sqrt{8+x^2}}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
g	-2 $\nearrow$	0

1) Utiliser le tableau de variation de g et les informations fournis par l'énoncé pour répondre aux questions suivantes :

a) Déterminer le signe de $g(x)$.

b) Justifier que l'équation $g(x)=-\dfrac{1}{2}$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$.

c) Vérifier que $\sqrt{8+\alpha^2}=2\alpha$.

2) Soit **f** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{8+x^2}-x$.

On désigne par ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

c) Montrer que la droite $\Delta : y=-2x$ est une asymptote à ζ_f.

d) Montrer que ζ_f est au-dessus de Δ.

3) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R},\ f'(x)=g(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que α est l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=x$.

4) Soient les points $A(\alpha,\alpha)$ et $B(-\alpha,2\alpha)$.

a) Montrer que $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\alpha$ est une équation de la tangente **T** à ζ_f au point **A.**

b) Vérifier que le point B appartient à la tangente **T.**

c) On a placé dans l'annexe (figure 2), le réel α sur l'axe des abscisses.

Tracer dans la figure 2 de l'annexe, la tangente **T**, la droite Δ et la courbe ζ_f.

5) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\left]0,+\infty\right[$.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$.

c) Déterminer $\left(f^{-1}\right)'(\alpha)$.

d) Montrer que pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$, $f^{-1}(x)=\frac{8-x^2}{2x}$.

6) Soit h la fonction définie sur $\left]0,2\right[$ par $h(x)=f^{-1}(-\alpha x^2+2\alpha x)$.

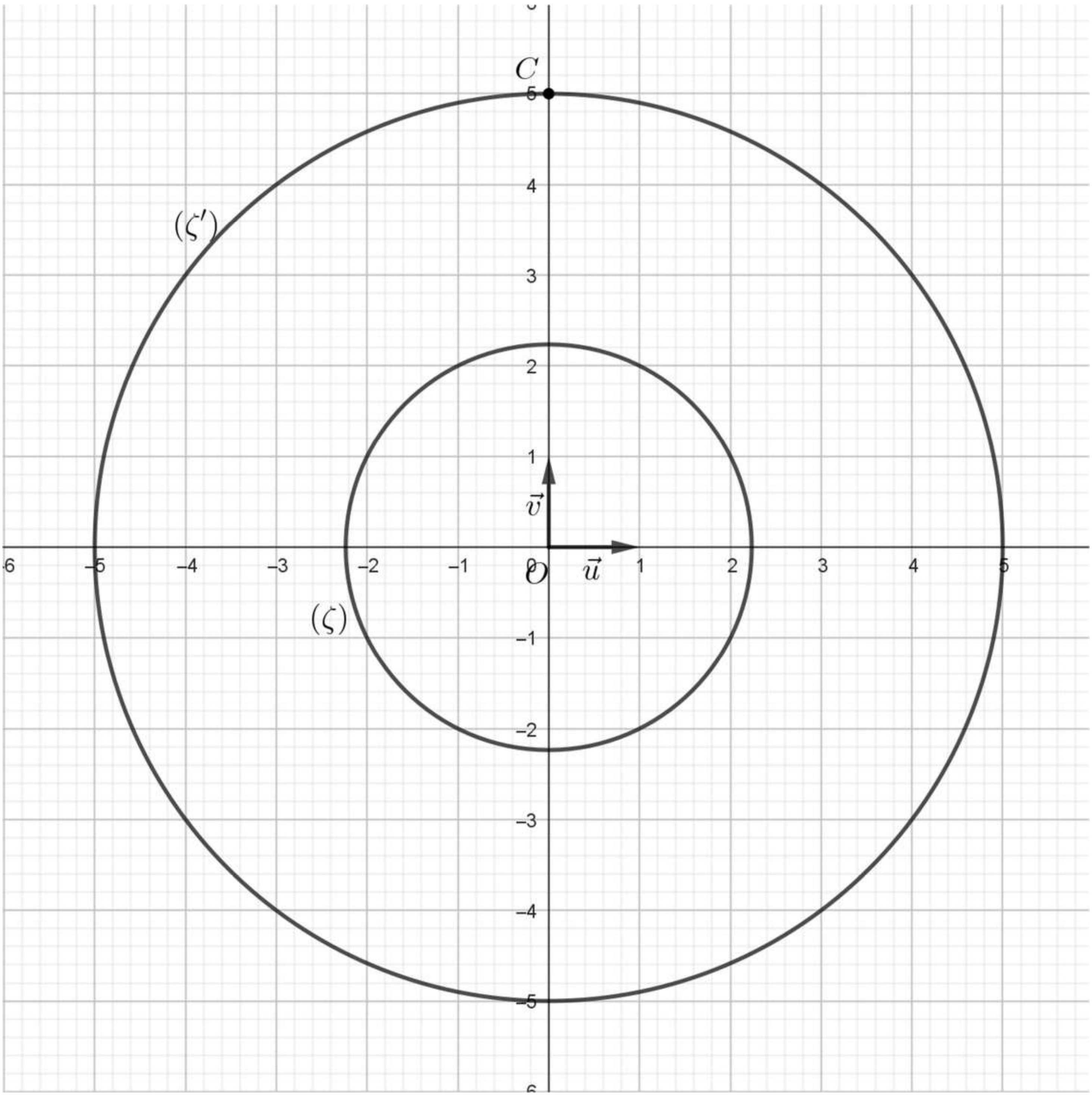
a) Montrer que h est dérivable sur $\left]0,2\right[$.

b) Dresser le tableau de variation de h.

<u>Annexe à rendre avec la copie</u>

<u>Nom et prénom :</u> ………………………………

(Figure 1)



(Figure 2)