

Délégation Régionale de Sousse	DEVOIR DE SYNTHESE N°1	Niveau : 4 Math
		Date : 12 – 12 – 2023
Année Scolaire : 2023/2024	Mathématiques	Durée : 3 heures

EXERCICE 1 : (3 points)

Dans la figure ci – contre, on a représenté la courbe d'une fonction g deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$, la tangente au point d'abscisse 1 et la demi – tangente au point d'abscisse 0 .

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - \cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Répondre par vrai ou faux sans justification.

1) $f'(0) = 1$

2) $(f \circ g)'(1) = 1$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g'(x) - 2}{x - 1} = 2$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)} = -1$

5) Soit h la restriction de g sur $[1 ; +\infty[$ et h^{-1} sa fonction réciproque

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{h^{-1}(x) - 1} = 1$$

EXERCICE 2 : (5 points)

Le plan P est orienté dans le sens direct .

Dans la figure 1 de la feuille annexe, ABC est un triangle équilatéral direct de centre O

On désigne par I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[AC]$ et W le milieu de $[IJ]$.

K est le symétrique de J par rapport à C et F est le symétrique de K par rapport à la droite (IJ)

1) a – Caractériser $S_{(AW)} \circ S_{(IJ)}$

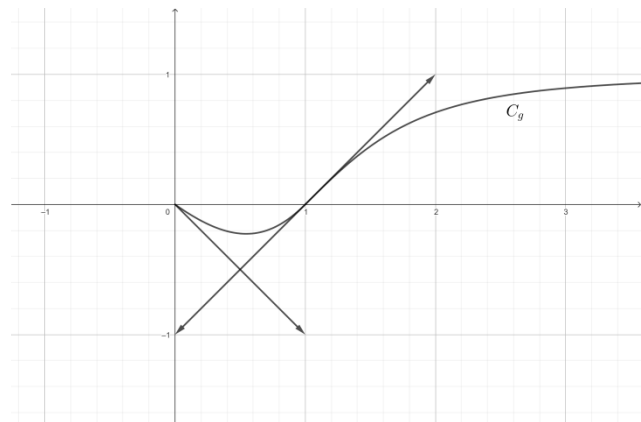
b – En déduire que (FJ) est parallèle à (AB) .

2) Soit g l'antidépacement vérifiant : $g(A) = B$ et $g(C) = A$.

a – Montrer que g est une symétrie glissante et déterminer son axe et son vecteur .

b – On pose $g(K) = G$. Montrer que A le milieu de $[IG]$

3) a- Montrer qu'il existe un unique déplacement f vérifiant : $f(J) = I$ et $f(K) = G$.



b-Montrer que $f(C) = A$.

c – Caractériser alors f .

4) Soit $h = f^{-1} \circ S_A \circ t_{\vec{J}}$

a – Montrer que h est une rotation et déterminer une mesure de son angle.

b – Soit Ω le centre de h . Montrer que le quadrilatère ΩFJK est un losange puis construire Ω

EXERCICE 3 : (5 points)

Le plan est rapporté d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1) Soit $m \in \mathbb{C}^*$. On considère l'équation $(E_m) : Z^2 + i(m - \overline{m} + 2i)Z + |m|^2 - 2im = 0$.

a – Vérifier que $(-im)$ est une solution de (E_m) .

b – Dédurre l'autre solution de (E_m) .

2) On considère les points $M(m)$, $N(-im)$, $P(i\overline{m} + 2)$ et $R(\alpha + i\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Montrer que le quadrilatère $NMPR$ est un parallélogramme si et seulement si M est sur une droite

D dont on déterminera une équation et que $\alpha = -\text{Im}(m)$

3) Soit f l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = i\overline{z} + 2$

a – Montrer que f est une isométrie.

b – Montrer que f est une symétrie glissante de vecteur $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'axe la droite $\Delta: y = x - 1$

4) a – Montrer que N est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

b – Dans la figure 2 de la feuille annexe, on a tracé la droite D et un point M de D .

Construire les points N , P et R .

Exercice 4: (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$ et C est la courbe de f dans un repère

orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement ce résultat

b) Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que pour tout $x > 1$, $f'(x) = \frac{2-x}{2x^2 \sqrt{x-1}}$

c) Dresser le tableau des variations de f

d) Construire la courbe C

2) Soit g la restriction de f sur $[1, 2]$

a) Montrer que g réalise une bijection de $[1,2]$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. On note g^{-1} la fonction réciproque de g

b) Construire la courbe C' de la fonction g^{-1}

c) g^{-1} est-elle dérivable à droite en 0? à gauche en $\frac{1}{2}$?

d) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $g^{-1}(x) = \frac{2}{1+\sqrt{1-4x^2}}$

e) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ et que pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$,

$$(g^{-1})'(x) = \frac{8x}{(1+\sqrt{1-4x^2})^2 \sqrt{1-4x^2}}$$

3) On considère la fonction h définie sur $[0,1]$ $h(x) = g^{-1}\left(\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right)\right)$

a) Montrer que h est dérivable sur $[0,1[$ et que pour tout $x \in [0,1[$, $h'(x) = \frac{\pi \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right)}{(1+\cos\left(\frac{\pi}{2} x\right))^2}$

b) Montrer que la fonction h' est continue sur $[0,1[$

4) On considère les suites u et v définies sur $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ par :

$$u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right) \dots \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = u_n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on a : $0 < v_n < u_n < 1$

b) Montrer que la suite u est décroissante et que la suite v est croissante

c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$

5) On considère la suite w définie sur $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ par $w_n = u_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

a) Montrer que la suite w est géométrique

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ $u_n = \frac{1}{2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{\pi}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, montrer qu'il existe $c_n \in]v_n, u_n[$ tel que $\frac{\pi \sin\left(\frac{\pi}{2} c_n\right)}{(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} c_n\right))^2} = \frac{h(u_n) - h(v_n)}{u_n - v_n}$

d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h(u_n) - h(v_n)}{u_n - v_n}$

Feuille annexe

Nom :

Prénom :

Classe :

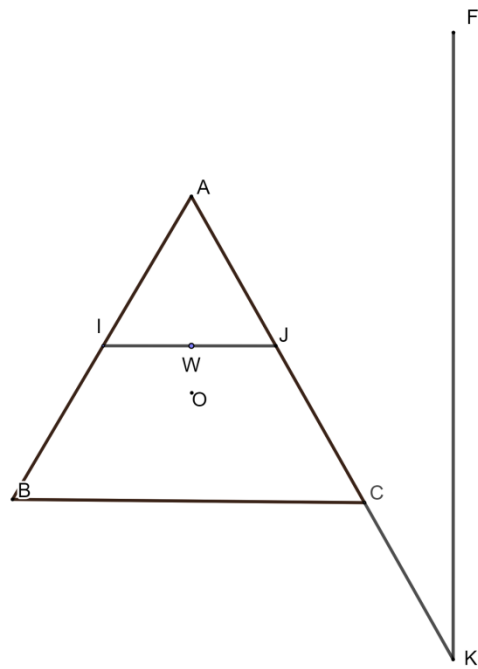


Figure 1

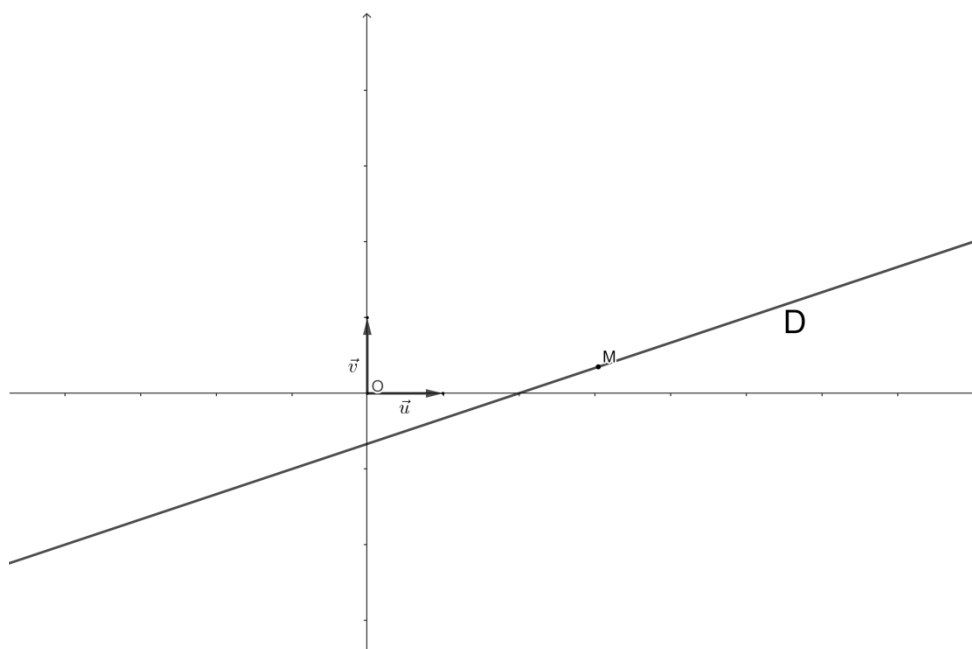


Figure 2