Exercice 1 ***(7 points)***

Soit ABC est un triangle isocèle en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

H est le projeté orthogonal de C sur (AB) ; I et J les milieux respectifs des segments $[AH]$ et $[AC]$.

On désigne par Δ la médiatrice de $[AC]$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que $f(C) = A$ et $f(H) = J$.
   b) Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.
   c) Soit D le symétrique de H par rapport à J. Montrer que $f(J) = D$.
   d) Montrer que $f\big((AB)\big) = \Delta$.
   e) La parallèle à (AC) passant par D coupe Δ en K. Montrer que $f(I) = K$.
2) Soit $g = S_\Delta\ o\ f$.
   a) Déterminer $g(H)$ et $g(C)$.
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.
   c) Montrer alors que le triangle CIK est équilatéral.
   d) On pose $f(B) = P$, montrer que $g(B) = P$ et en déduire que $P \in \Delta \cap \Delta'$ où Δ' est la médiatrice de $[CB]$.
   e) Soit $h = R_{(J,-\frac{\pi}{3})}\ o\ t_{\overrightarrow{HJ}}$, montrer que $h = g$.
3) Soit L le milieu de $[AD]$, en utilisant le fait que $h(I) = K$ et que $h = g$ prouver que :
   a) (HJ) est la médiatrice de $[KL]$.
   b) Le triangle JLK est équilatéral.
4) On munit le plan du repère orthonormé direct $(A,\vec{u},\vec{v})$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
   a) Déterminer la forme exponentielle de Z_C affixe du point C.
   b) Déterminer l'écriture complexe de g.
   c) En déduire les coordonnées du point P.

Exercice 2 ***(8 points)***

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, par $f(x) = \tan x$.

A/ 1) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}_+$.

2) a- Etudier la dérivabilité de f^{-1}sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée. (f^{-1} est la fonction réciproque de f)

b- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $\dfrac{x}{1+x^2} < f^{-1}(x) < x$.

3) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on considère la fonction h_n définie sur $[0,+\infty[$ par $h_n(x) = f^{-1}\left(\dfrac{x}{n}\right) + \dfrac{x}{2}$.

a- Montrer que l'équation $h_n(x) = 1$ admet une unique solution α_n dans $\mathbb{R}_+$ et que $0 < \alpha_n < 2$.

b- Montrer que pour tout x de $[0,+\infty[$ on a $h_{n+1}(x) \leq h_n(x)$ puis déduire que $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

c- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right)$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n = 2$.

4) Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

a- Montrer que $\alpha_n > 1$.

b- En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \sqrt[n]{t}$ sur $[1,\alpha_n]$,

Montrer que $1 < \sqrt[n]{\alpha_n} < 1 + \dfrac{1}{n}$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\alpha_n}$.

B/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} g(x)=\sqrt{x}\,f^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) & si \quad x>0 \\ g(0)=0 \end{cases}$

On note $(\mathscr{C}_g)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a- Etudier la branche infinie de $(\mathscr{C}_g)$ au voisinage de $+\infty$.

b- Montrer que g est continue à droite en 0 .

c- Etudier la dérivabilité de g à droite en 0.

2) a- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(f^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)-\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

b- En déduire que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

c- Tracer $\mathscr{C}_g$

3) Montrer que : pour tous réels a et b de $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ on a , $\left|g(b)-g(a)\right|\le\dfrac{1}{2}|b-a|$

4) Montrer qu'il existe un unique réel $c\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ tel que $g(c)=c$.

5) Soit (U_n) et (V_n) les deux suites réelles définies par :

$$\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=g(U_n) \quad ; \ n\ge 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_0=\dfrac{1}{2} \\ V_{n+1}=g(V_n) \quad ; \ n\ge 0 \end{cases}$$

a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2}\le V_n\le c\le U_n\le 1$.

b- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|V_n-U_n\right|\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c- Montrer que les deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes, puis déterminer leur limite.

Exercice 3 ***(5 points)***

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit a un nombre complexe de module 1 et d'argument θ tel que $\theta\in\left]0,\pi\right[$.

On donne les équations : $(E_a): z^2-ia(1+ia)z-ia^3=0$ et $(E): z^2+e^{i\frac{5\pi}{6}}z-e^{i\frac{2\pi}{3}}=0$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_a) .

On désigne par A, M et N les points d'affixes respectives $z_A=1$, $z_M=ia$ et $z_N=-a^2$.

2) Déterminer l'ensemble des points M lorsque $\theta\in\left]0,\pi\right[$.

3) a- Vérifier que $-i$ est une solution de (E) .

b- Résoudre alors l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

c- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^6+ie^{i\frac{\pi}{3}}z^3+1-e^{i\frac{\pi}{3}}=0$

4) a- Montrer que AMN est un triangle équilatéral direct , ssi , a solution de (E).

b- Construire M et N dans le cas où AMN est équilatéral direct.

5) On désigne par H l'orthocentre du triangle OAP où $P=R_{(O,-\frac{\pi}{2})}(M)$, et par h l'affixe de H.

a- Montrer que $h+\overline{h}=a+\overline{a}$ et $h=\overline{h}e^{i\theta}$.

b- En déduire que $h=\dfrac{\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}$.