

Exercice1 (4pts)

On considère dans \mathbb{C} les équations : (E) : $z^3 = 8i$. (E') : $(z - i)^2 = 2i(\bar{z} + i)$

- a. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) et écrire ses solutions sous la forme algébrique.
- b. Soit $z \neq i$, montrer que si z est solution de (E') alors $|z - i| = 2$
- c. Soit $z \neq i$, montrer que : z solution de (E') équivaut à $z - i$ solution de (E).
- d. En déduire sous la forme algébrique les solutions de (E')

Exercice2:(4pts)

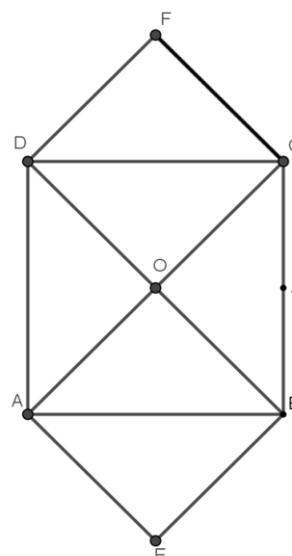
Soit n un entier naturel non nul , on considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

- 1.a. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$, admet dans $[0, +\infty[$ une solution unique α_n .
- b. Justifier que : $0 < \alpha_n < \frac{2}{3}$, calculer en justifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^n$.
2. a. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$
- b. En déduire le sens de variation de la suite (α_n)
- c. Montrer que la suite (α_n) est convergente puis calculer sa limite .

Exercice 3 :(5pts) (voir figure ci-contre)

Dans le plan orienté, on a : • ABCD carré direct de centre O • BOAE carré direct. • DOCF carré direct
On désigne par J le milieu du segment [BC].

1. a. Caractériser les isométries : $S_{(OC)} \circ S_{(OJ)}$, $S_{(OJ)} \circ S_{(DC)}$ et $S_{(OC)} \circ S_{(DC)}$
- b. En déduire la nature et les caractéristiques des isométries : $R(O, \frac{\pi}{2}) \circ t_{\vec{CB}}$ et $R(O, -\frac{\pi}{2}) \circ R(C, \frac{\pi}{2})$
2. Soit l'application $h = S_{(BD)} \circ R(C, \frac{\pi}{2})$.
 - a. Déterminer $h(C)$, $h(D)$ et $h(F)$.
 - b. Montrer que h n'a pas de points invariants, en déduire la nature de h .
 - c. Montrer que $h = t_{\vec{OE}} \circ S_{(OE)}$.
3. Soit φ l'isométrie tels que $\varphi(D) = E$, $\varphi(O) = B$ et $\varphi(J) = J$
 - a. Montrer que φ est une rotation et donner son angle.
 - b. Déduire alors la nature du triangle JDE .



Exercice 4 (7pts)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

On désigne par ζ la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1.a. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$ $f'(x) = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$
- b. Montrer que f est bijective de $[0,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera
- c. Tracer les courbes ζ de f , et ζ' de f^{-1} en précisant la demi-tangente au point d'abscisse 0.

2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = f(\sin(x))$

a. Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ $g(x) = \tan(x)$

b. Montrer que la fonction \tan est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, +\infty[$

c. Montrer que \tan^{-1} est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout $x \in [0, +\infty[$: $(\tan^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

3. Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} h(x) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ h(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

a. Montrer que h est continue à droite en 0.

b. Montrer que h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $h'(x)$.

c. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$: $\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

e. En déduire alors que h est dérivable à droite en 0 et préciser $h'_d(0)$.

4. On considère les suites (S_n) et (U_n) définie sur \mathbb{N}^* par :

$$\bullet S_n = \sum_{p=1}^n \tan^{-1}(p+1) - \tan^{-1}(p)$$

$$\bullet U_n = \tan^{-1}\left(\frac{2}{n}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

a. Montrer que : $S_n = -\frac{\pi}{4} + \tan^{-1}(n+1)$, calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

b. Montrer qu'il existe un réel $c_n \in \left] \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right[$ tel que : $nU_n = \frac{1}{1+c_n^2}$ calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} nU_n$

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < U_n < \frac{\pi}{2}$

d. Montrer que $\tan(U_n) = \frac{n}{n^2+2}$ en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \tan(U_n)$.

Fin

On donne la formule

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$