DEVOIR DE SYNTHESE N°1

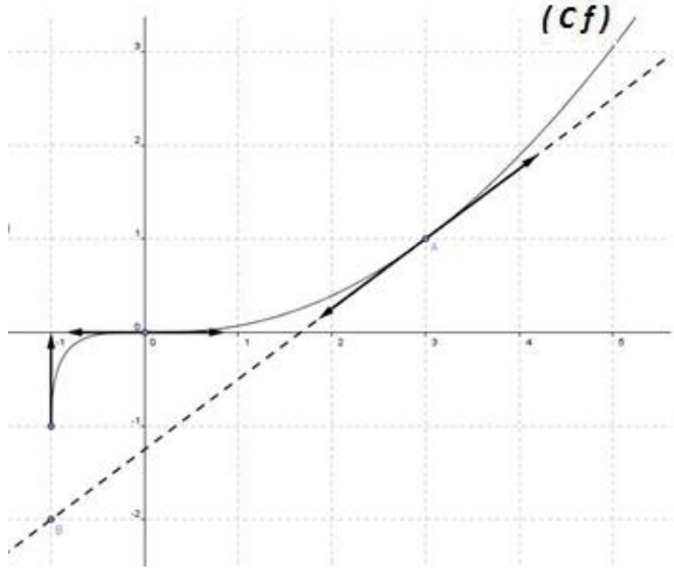
EXERCICE N°1 — 3 POINTS

En exploitant la figure ci-dessous répondre aux questions suivantes

1) Justifier que f est une bijection de $[-1\,;+\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera

2) Déterminer : $f'(3)\,;f''(0)\,;\ f^{-1}([-1\,;1[)$, $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{f(x)+1}{x+1}$ et $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f^{-1}(x)-3}{x-1}$

3) Montrer qu'il existe au moins un réel $\alpha \in]\,0\,,1\,[$ tel que : $(f^{-1})'(\alpha) = 3$



EXERCICE N°2 — 5POINTS

Soit θ un réel de l'intervalle $]0,\pi[$. On considère l'équation (E) : $z^2 - (1 + 2i\sin\theta)\,z + e^{i\theta} - 1 = 0$

1) a) Vérifier que $e^{i\theta}$ est une solution de (E).
   b) Déterminer alors l'autre solution z' de l'équation (E).
   c) Ecrire z' sous forme exponentielle.
2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

   Soit A et B les points d'affixes respectives $e^{i\theta}$ et $1 - e^{-i\theta}$ pour tout $\theta \in]0,\pi[$.

   a) Déterminer les ensembles sur lesquels varient les points A et B lorsque θ varie.
   b) Déterminer le réel θ pour que OAB soit un triangle rectangle en O
3) Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M'd'affixe z' tel que : $z' = 1 - \bar{z}$.
   a) Vérifier que pour tout $\theta \in]0,\pi[$, $f(A) = B$.
   b) Montrer que f est un antidéplacement.
   c) Déterminer l'ensemble des points fixes par f.
   d) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

LYCEE BIR LAHMAR

EXERCICE N°3 5 POINTS

Soit ABC un triangle isocèle et rectangle tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$et soit O le milieu de [AC]. On désigne par I le milieu de [OB] et par D le symétrique de O par rapport à (BC).

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = C \ et \ f(O) = D$

b) Montrer que f est une rotation de centre B et d'angle $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$

c) Soit $K = f(I)$ .Montrer que K est le milieu de [BD].

2) On pose $g = S_{(BO)} \circ S_{(AB)} \circ f^{-1}$.

a) Déterminer $g(B) \ et \ g(C)$

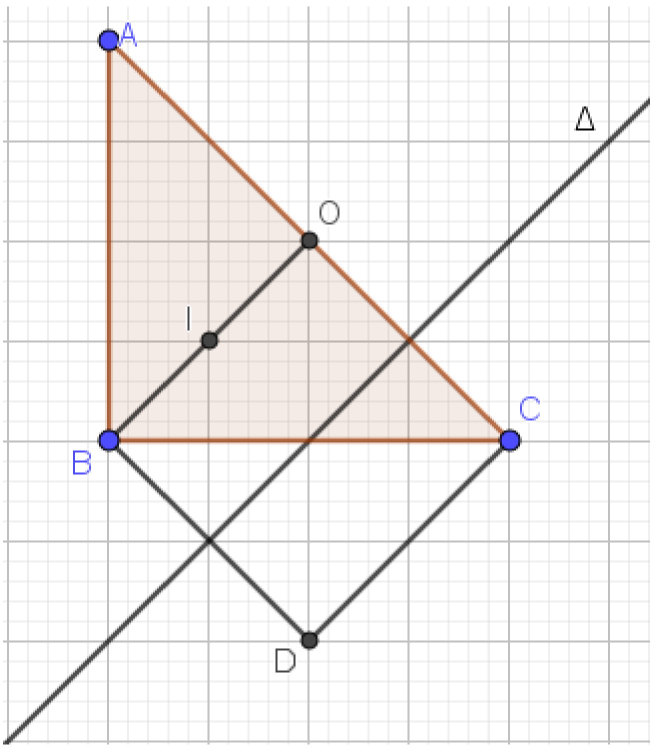
b) En déduire que $f^{-1} = S_{(AB)} \circ S_{(BO)}$

3) On pose $h = S_{(OD)} \circ f^{-1}$.On désigne par (Δ) la médiatrice du segment [BD].

a) Déterminer $h(B) \ et \ h(D)$

b) Montrer que h est la symétrie glissante d'axe (Δ) et de vecteur $\overrightarrow{BO}$.

4) Caractériser l'application $S_{(BO)} \circ h$.



EXERCICE N°4 7POINTS

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter le résultat graphiquement

b) Dresser le tableau de variation de f

2) a) Montrer que f réalise une bijection de I sur $J =]0,1]$.

On note f^{-1} la bijection réciproque de f

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in]0,1[$

c) Tracer les courbes C etC' respectivement de et f^{-1} dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

3) Soit la fonction h définie sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$par $h(x) = f\left(\frac{1}{\sin(\pi x)}\right)$ si $x \in \left]0,\frac{1}{2}\right]$ et $h(0) = 0$

a) Montrer que h est continue sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$

b) Vérifier que pour tout $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ on a : $h(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

c) Montrer que h réalise une bijection de $\left[0,\frac{1}{2}\right]$sur un intervalle k que l'on précisera

d) Montrer que h^{-1}est dérivable sur k et expliciter $(h^{-1})'(x)$ pour tout $x \in K$

4) Soit (a_n) et (b_n) les suites définies par : $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ et $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} f\left(\sqrt{k}\right)$ avec n un entier

tel que $n \geq 2$

a) Vérifier que pour tout $k \geq 2$ on a $f\left(\sqrt{k}\right) = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$

En déduire que (b_n) est une suite constante

b) Montrer que pour tout $k \geq 2$ on a $\frac{1}{2\sqrt{k}} \leq f\left(\sqrt{k}\right) \leq \frac{1}{2\sqrt{k-1}}$

En déduire que pour tout $n \geq 2$ on a : $2b_n + \frac{1}{n} - \frac{2}{\sqrt{n}} \leq a_n \leq 2b_n - \frac{1}{\sqrt{n}}$

c) Montrer alors que (a_n) est convergente et donner sa limite

LYCEE BIR LAHMAR