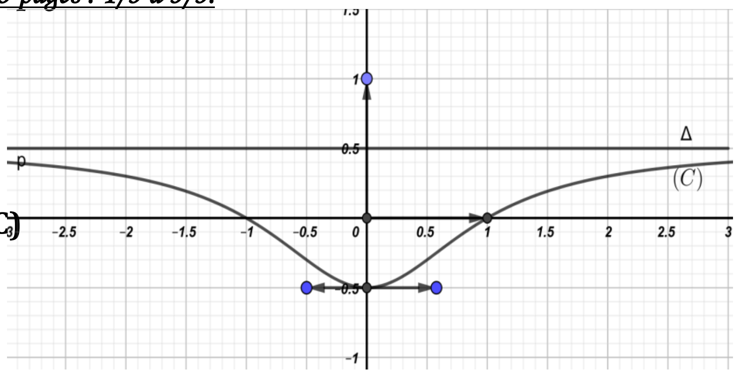
Prof : Dhahbi . A *Lycée cité Ibn khaldoun*		***Devoir de synthèse n°1*** ***Mathématiques***

Coefficient : 4	*Classe : 4^{eme} Maths 1*	*Mercredi 12-12-2023*	*3Heures*

N.B : Le sujet comporte 3 pages : 1/3 à 3/3.

EXERCICE N° 1 (4 points)



***A*- Soit f une fonction deux fois dérivable sur IR.**

On donne ci-contre la représentation graphique (C)

de la fonction dérivée f ' de f tel que f(0) = 1.

a) Montrer que pour tout n ≥ 2, f '(x) = $-\frac{1}{n}$ admet une unique solution $\alpha_n \in [-1,0]$.

b) Montrer que la suite α_n est strictement décroissante.

c) Montre que le point A(0, 1) est un point d'inflexion de la courbe C_f.

d) Montre que la courbe C_f. admet exactement deux tangentes horizontales.

e) Montrer que C_f admet exactement deux tangentes parallèle à la droite y = $\frac{1}{4}x$

f) Montre que pour tout x de [0, +∞[, on a : $\left|f(\frac{x}{2})-1\right| \le \frac{1}{4}|x|$.

B - **Répondre par « Vrai ou Faux » en justifiant votre réponse.**

a) Soit ABC un triangle équilatéral.
Si f est une isométrie vérifiant f(A)=B, f(B) = C et f(C)= A, Alors $fofof = Id_P$

b) Si A et B deux points distincts du plan et I milieu de segment [AB] alors $S_{(IB)} o t_{\overrightarrow{AI}} o S_{(AB)} = S_I$

EXERCICE N° 2 (4 points)

***Soit m un nombre complexe* et (E_m) l'équation : z² + (im + 2)z + im +2 - m = 0.**

1°/ a) Soit Δ le discriminant de (E_m). Vérifier que $\Delta = (im-2i)^2$.

b) Résoudre dans l'ensemble C des nombre complexes l'équation (E_m).

2°/ Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé directe $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On considère les points A et B d'affixes respectives z_A = - 1 – i et $z_B = 2$.

3°/ Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z on associe le point M'(z') tel que : $z' = -iz - 1 + i$.

a) Montrer que f est une rotation dont on donnera une mesure de son angle et l'affixe de son centre I.

b) Justifier que f(B) = A.

c) Montrer que $z' - z_A = -i(z - z_B)$.

d) En déduire l'ensemble des points M tels que A, M et M' soient alignés.

4°/ Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z on associe le point M''(z'') tel que : $z'' = -i\bar{z} - 1 + i$.

a) Montrer que g est une isométrie qui n'admet aucun point fixe.

b) Justifier que $g = foS_{(OB)}$.

c) Soient M(z) et $M_1(z_1)$. Montrer que $(gog)(M) = M_1$ si et seulement si $z_1 = z - 2 + 2i$.

Voir verso ☞

d) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de gog.

e) Montrer que g est une symétrie glissante dont on déterminer une équation de son axe D et l'affixe de son vecteur $\vec{w}$.

EXERCICE N°3 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1+x^2}}$.

ζ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1°/ Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x $\in \mathbb{R}$, $f'(x)=-\dfrac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}$.

2°/ a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} de $\mathbb{R}$ sur]-1, 1[.

b) Tracer les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans le même repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$)

c) Montrer que pour tout x $\in$]-1,1[; $f^{-1}(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

3°/ Soit g la fonction définie sur $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ par g(x)= $1+f^{-1}(\sin x)$.

a) Vérifier que pour tout x $\in$ $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$, $g(x)=1-\tan x$.

b) Montrer que g réalise une bijection de $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x de $\mathbb{R}$, $(g^{-1})'(x)=\dfrac{-1}{1+(x-1)^2}$

4°/ Soit h la fonction définie sur $]-\infty,0[$ par $h(x)=g^{-1}(1+x)+g^{-1}(1+\dfrac{1}{x})$.

a) Montrer que h est dérivable sur $]-\infty,0[$ et calculer $h'(x)$.

b) Calculer $h(-1)$ et en déduire que pour tout x $\in$ $]-\infty,0[$, $h(x)=\dfrac{\pi}{2}$.

5°/ Pour tout n de IN*, on pose $U_n=\sum_{k=1}^{n}(g^{-1}(\dfrac{1}{k})+g^{-1}(-\dfrac{1}{k}))$ et $V_n=\dfrac{U_n}{n}$.

a) Vérifier que pour tout entier k de IN*, $h(\dfrac{-k}{k+1})=g^{-1}(\dfrac{1}{k+1})+g^{-1}(-\dfrac{1}{k})$.

b) Montrer alors que pour tout n de IN*, $U_n=(n-1)\dfrac{\pi}{2}+g^{-1}(-\dfrac{1}{n})$.

c) En déduire la suite V est convergente et calculer sa limite.

6°/ Pour tout n de IN*, on pose $W_n=g^{-1}(\dfrac{1}{n})-g^{-1}(-\dfrac{1}{n})$.

a) Montrer qu'il existe un réel $c_n\in\left]-\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right[$ tel que $nW_n=\dfrac{-2}{1+(c_n-1)^2}$.

b) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nw_n$.

Voir verso ☞

EXERCICE N° 4 (6 points)

Dans le plan orienté de sens direct, on considère un carré OABC de centre I tel que :

$\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

On désigne par J le milieu de [BC], L le milieu de [BJ], K le milieu de [AB]

et H le projeté orthogonale de L sur (OA).

Soit E le point de [OA] distinct de O et de A. La parallèle à la droite (OC) passant par E coupe [BC]en M et la parallèle à la droite (OB) passant par E coupe [AB]en N.

1°/ Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie C sur B et M sur N.

2°/ a) Montrer que f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ **.**

b) Montrer que f(B) =A.

c) En déduire que I est le centre de la rotation f.

3°/ a) Montrer que $foS_{(AC)}$ **est une symétrie orthogonale dont on déterminera l'axe.**

b) En déduire que $S_{(AB)}ofoS_{(AC)}$ **est une translation dont on précisera le vecteur.**

4°/ Soit g l'antidéplacement qui envoie C sur B et M sur N.

a) Montrer que g(B) =A. (On pourra se servir de l'isométrie $goS_{(MC)}$ **.**

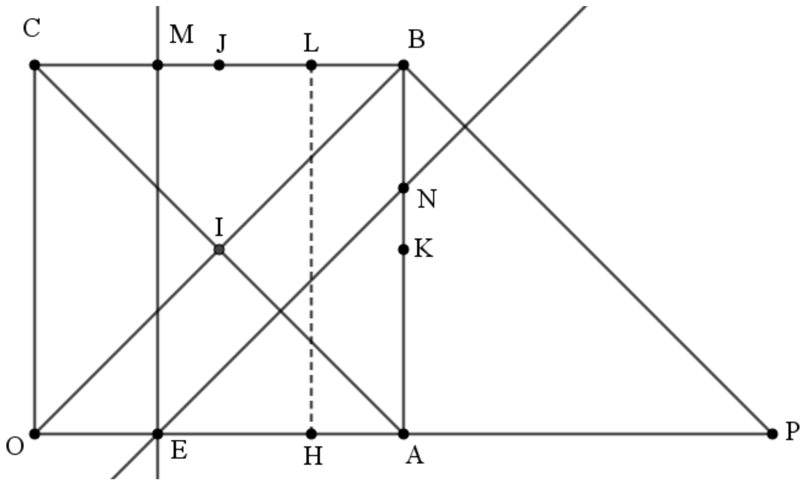
b) En déduire que g est une symétrie glissante dont on déterminera le vecteur et l'axe.

c) Soit P le point tel que ACBP soit un parallélogramme. Montrer que g(A) = P.

d) Déterminer l'image de la droite (AC) par g.

5°/ a) Déterminer $fog(C)$ **et** $fog(B)$ **.**

b) En déduire que fog **est une symétrie glissante dont on déterminera le vecteur et l'axe.**



Croyez en vos rêves et il se réaliseront peut-être. Croyez en vous et ils se réaliseront surement.

Martin Luther king

Bonne Réflexion