Sfax-1, Tunis-1-2, Ben Arous & Mahdia	Devoir de synthèse N°1		$4^{ème}$ Math
Date : 10 / 12 / 20024	Mathématiques	Coefficient : 4	Durée : 3 h

Exercice N°1: (4,5 points).

On considère dans le plan orienté un carré $ABCD$ de centre O et de sens direct, et on note I et J les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[BC]$ (figure1 de l'annexe ci-jointe).

1. a) Justifier qu'il existe un unique déplacement φ qui envoie A sur B et B sur C
   b) Montrer que φ est une rotation dont on précisera le centre et une mesure de son angle.
2. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$
   a) Déterminer $r \circ \varphi(A)$ et $r^{-1} \circ \varphi(A)$
   b) Caractériser, alors, les applications $r \circ \varphi$ et $r^{-1} \circ \varphi$
3. Soit ψ l'antidéplacement qui transforme A en B et B en C
   a) Déterminer $\psi \circ \psi(A)$
   b) Montrer que ψ est une symétrie glissante puis préciser son axe et son vecteur.
4. a) Déterminer $r \circ \psi(A)$ et $r \circ \psi(I)$
   b) Caractériser, alors, l'application $r \circ \psi$

Exercice N°2: (5 points).

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on considère un losange $OIAB$ de centre C tel que $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ (figure2 de l'annexe ci-jointe).

1. Donner z_B sous forme exponentielle puis déterminer z_A
2. Soit f l'application, du plan P dans lui-même, qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tels que $z' = a\bar{z} + b$ où a et b sont deux nombres complexes vérifiant $|a| = 1$
   a) Montrer que f est une isométrie.
   b) Déterminer b et a sachant que $f(O) = I$ et $f(I) = B$
   c) Ecrire a sous forme exponentielle.
3. Dans toute la suite de l'exercice, on prend $a = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $b = 1$ et on note D le milieu de $[OI]$
   a) Montrer que f n'admet pas de points invariants.
   b) Démontrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.
4. Soit K le symétrique de O par rapport à I d'image H par f
   a) Montrer que $B = I * H$
   b) Démontrer que $(AI) \perp (AH)$
5. Soit l'application $g : M(z) \longmapsto M''(z'')$ tels que $z'' = e^{i\frac{2\pi}{3}}\bar{z} + 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$
   a) Donner l'expression complexe associée à la translation de vecteur $\overrightarrow{IB}$
   b) Montrer, alors, que g est un antidéplacement.

Exercice N°3: **(2,5 points).**

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout réel x on a : $f(2x) = 2f(x)$

1 (a) Déterminer la valeur de $f(0)$

(b) Démontrer que pour tout réel x on a : $f'(2x) = f'(x)$

2 Soit x un réel fixé, on désigne par (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = f'\left(\frac{x}{2^n}\right)$

(a) Montrer que la suite (u_n) est constante sur $\mathbb{N}$

(b) En déduire que pour tout réel x on a : $f'(x) = f'(0)$

(c) Trouver toutes les fonctions f qui satisfont les énoncées.

Exercice N°4: **(8 points).**

▶ **(I)** Soit f la fonction définie sur $]-1;1[$ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ de courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1 (a) Etudier la parité de f

(b) Déterminer $\lim\limits_{1^-} f$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

(c) Justifier que f est dérivable sur $]-1;1[$ et que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}^3}$

2 (a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1;1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

(b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

3 (a) Montrer que $\Delta : y = x$ est une tangente à $\mathscr{C}$ en un point dont on précisera l'abscisse.

(b) Tracer les courbes $\mathscr{C}$ de f et $\mathscr{C}'$ de f^{-1} dans le même repère (figure3 de l'annexe ci-jointe).

▶ **(II)** Soit h la fonction définie sur $]-1;1[$ par : $h(x) = f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$

1 (a) Montrer que pour tout réel x dans $]-1;1[$ on a : $h(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

(b) Prouver que h admet une fonction réciproque g définie sur $\mathbb{R}$

(c) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $g'(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)}$

2 Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\varphi(x) = g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)$

(a) Justifier que φ est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ et donner $\varphi'(x)$

(b) Montrer, alors, que : $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ -1 & si \quad x < 0 \end{cases}$

▶ **(III)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $a_n = \sum_{k=1}^{n}\left[g\left(1+\frac{1}{k}\right) + g\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]$ et $b_n = \frac{a_n}{n}$

1 Donner la valeur de $\varphi\left(1+\frac{1}{k}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

2 En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a : $g\left(1+\frac{1}{k}\right) + g\left(1-\frac{1}{1+k}\right) = 1$

3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $a_n = n - g\left(1-\frac{1}{1+n}\right)$

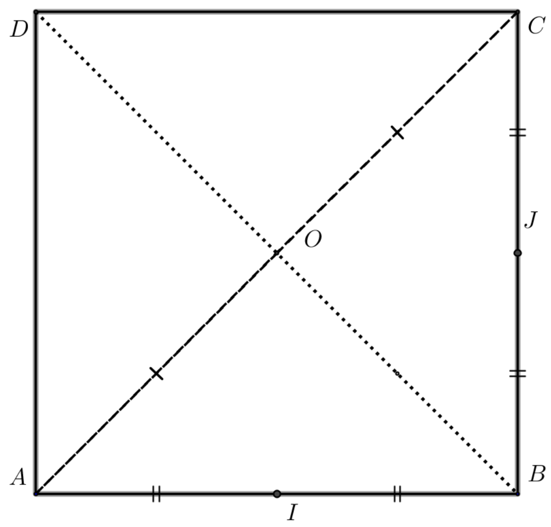
4 En déduire que la suite (b_n) est convergente et donner sa limite.

Devoir de synthèse N°1 en mathématiques pour $4^{ème}$ math : 2024/2025

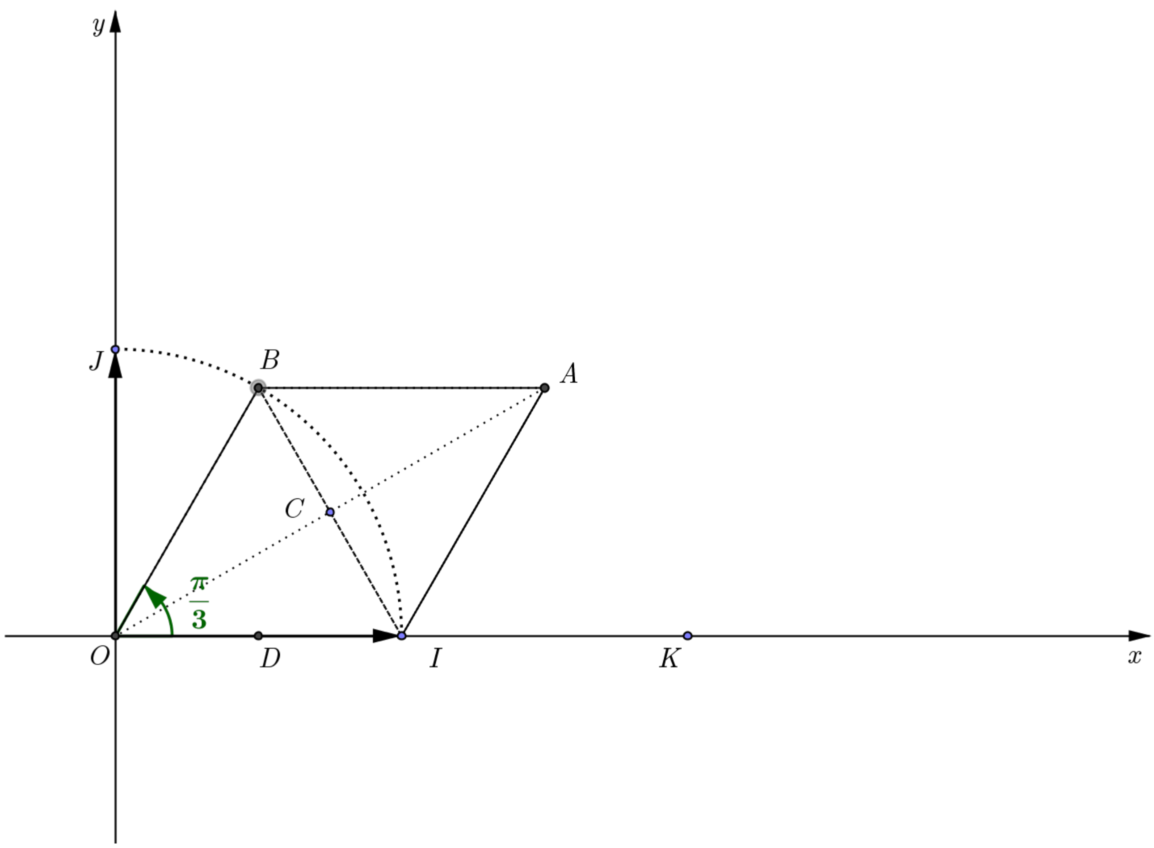
Annexe à rendre avec la copie

Nom et prénom : .... **Classe :** $4M$ ..... **N° :** ....

Exercice1 (figure1) :



Exercice2 (figure2) :



Exercice4 (figure3) :