

Exercice N°1 (6 points)

Dans le plan orienté, on considère un losange OABC de centre Ω et de sens direct tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$. ADB est un triangle rectangle et isocèle en A de sens direct, On désigne par I le point d'intersection des bissectrices du triangle ADB. (voir figure sur la feuille à remettre).

- 1/ a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R tel que $R(B) = D$ et $R(C) = A$
b) Montrer que R est une rotation de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{4}$
- 2/ On pose $f = R_{(B, \frac{\pi}{4})} \circ R_{(A, \frac{\pi}{2})}$
a) Quelle est la nature de f ?
b) Construire le point $A' = f(A)$.
c) En décomposant chacune des deux rotations en deux symétries orthogonales d'axes convenablement choisis, montrer que f est une rotation de centre I et d'angle $\frac{3\pi}{4}$
- 3/ On pose $g = f \circ R$
a) Déterminer $g(B)$ puis caractériser g.
b) Montrer que le triangle BCA' est rectangle isocèle en B.
c) Montrer que les points C, I et A' sont alignés.
- 4/ On pose $h = R \circ S_{(AC)}$
a) Déterminer $h(B)$ et $h(C)$.
b) Montrer que h est une symétrie glissante.
c) On pose $\Omega' = h(\Omega)$. Montrer que Ω' est le milieu du segment [OD].
d) Déterminer la forme réduite de h.

Exercice N°2 (4points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, α est un réel de $]0, 2\pi[$ et $\mathcal{C}$ est le cercle de centre B et de rayon 1.

I. 1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - i(2 - e^{i\alpha})z + e^{i\alpha} - 1 = 0$

2/ Ecrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.

II. Soit f l'application de $P \setminus \{B\}$ vers $P \setminus \{A\}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{\bar{z} - i}{\bar{z} + i}$

1/ a/ Montrer que f n'a pas de point invariant.

b/ Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on a : $z' - 1 = \frac{-2i}{\bar{z} + i}$

c/ En déduire que pour tout $M \in P \setminus \{B\}$, on a : $AM' \cdot BM = 2$ et $(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM'}}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

d/ Construire le point M' à l'aide d'un point M de $\mathcal{C}$.

2/ Soit (E) l'équation dans $\mathbb{C}$: $(\bar{z} - i)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)(\bar{z} + i)^3$

a/ Montrer que si z est une solution de (E) alors $\bar{z}$ est réel.

b/ Montrer que : $z' = e^{i\alpha} \Leftrightarrow z = -\cotan(\frac{\alpha}{2})$

c/ Résoudre alors l'équation (E)

d/ Utiliser de ce qui précède pour construire le point Ω antécédent par f du point Ω' d'affixe $\omega' = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice N°3 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $] -1, 1[$ par : $f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

- A.** 1) Etudier les variations de f .
 2) Dédire que f réalise une bijection de $] -1, 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 3) Construire dans un même repère orthonormé, les courbes C et C' respectivement de f et f^{-1} .
 4) Expliciter $f^{-1}(x)$, $x \in J$.

B. Soit h la fonction définie sur $] -1, 1[$ par : $h(x) = f(-\sin(\frac{\pi}{2}x))$.

1) a) Vérifier que $h(x) = -1 - \tan(\frac{\pi}{2}x)$; $x \in] -1, 1[$.

b) Montrer que h admet une fonction réciproque g définie sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g'(x) = \frac{-2}{\pi[(x+1)^2+1]}$

2) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\varphi(x) = g(x-1) + g(\frac{1}{x}-1)$

a) Montrer que φ est dérivable sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$ et déterminer $\varphi'(x)$.

b) Calculer $\varphi(1)$ et $\varphi(-1)$. En déduire que pour tout $x > 0$, $\varphi(x) = -1$, et que pour tout $x < 0$, $\varphi(x) = 1$.

3) Soit V et W les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \sum_{k=1}^n [g(\frac{1}{k}) + g(\frac{-1}{k})]$ et $W_n = \frac{V_n}{n}$.

a) Donner la valeur de $\varphi(1 + \frac{1}{k})$; $k \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire que $g(\frac{1}{k}) + g(\frac{-1}{1+k}) = -1$; $k \in \mathbb{N}^*$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $V_n = -n - g(\frac{-1}{n+1})$.

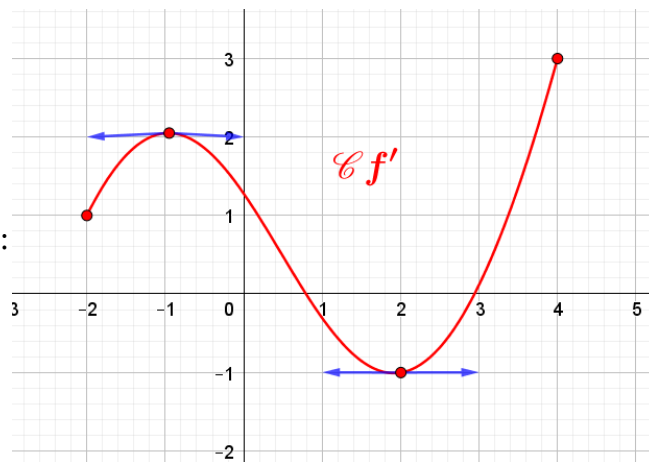
En déduire que la suite W est convergente et donner sa limite.

Exercice N°4 (4 points)

- A.** Sur la figure ci-contre on a représenté graphiquement une partie de la courbe de la fonction dérivée f' d'une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f(-1) = 2$ et $f(2) = -1$.

En utilisant le graphique, justifier les propositions suivantes :

- 1/ la fonction f admet deux extrémums.
- 2/ La courbe de f admet au moins deux points d'inflexions.
- 3/ Pour tout $x \in [-1, 3]$, $-x+1 \leq f(x) \leq 2x+4$.
- 4/ Pour tout $x \in [-2, 4]$, $|f(x)+1| \leq 3|x-2|$
- 5/ Il existe au moins $c \in] -2, 4[$ tel que : $f''(x) = \frac{1}{3}$



- B.** Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $] a, b[$ et tel que pour tout $x \in] a, b[$, $g'(x) \neq 0$

Montrer qu'il existe au moins $c \in] a, b[$ tel que : $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

