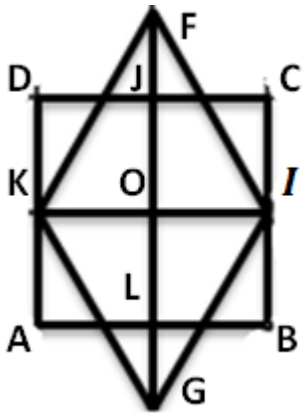
4 Maths **14/12/2023**

L.Sayada **Durée : 3 heures**

Devoir de synthèse n°1

Epreuve de mathématiques

Exercice 1 (5 points)



Le plan est orienté dans le sens direct, on considère un carré ABCD direct de centre O et les triangles équilatéraux directs IFK et IKG comme l'indique la figure ci-contre. I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [BC], [DC], [AD] et [AB].

1) Soit l'isométrie f = $S_{(KL)} o S_{(KG)} o S_{(IJ)} o S_{(CD)}$.

a) Caractériser et comparer $S_{(KF)} o S_{(JK)}$ et $S_{(KL)} o S_{(KG)}$.

b) Caractériser et comparer $S_{(IJ)} o S_{(CD)}$ et $S_{(KJ)} o S_{(OG)}$.

c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

2) Soit R la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$, t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et g= t o R.

a) Déterminer la droite Δ puis déduire les droites Δ_1 et Δ_2 telles que R= $S_\Delta o S_{\Delta_1}$ et t=$S_{\Delta_2} o S_\Delta$.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ où $\vec{u}= \overrightarrow{OI}$ et $\vec{v}= \overrightarrow{OJ}$.

On considère l'application φ du plan dans lui-même qui à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' = a $\bar{z}$ +b et on donne φ(K)= I et φ(L)= J.

a) Déterminer a et b.

b) Montrer que φ est une isométrie du plan.

c) Déterminer l'ensemble des points invariants par φ.

d) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de φ.

Exercice 2 (5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct, on considère les carrés directs ABCD et ADGE de centres respectifs O et I. Soit F le symétrique de C par rapport à B.

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme B en D et D en E.

b) Déterminer alors la nature de f.

c) Déterminer l'image par f de chacune des droites (AB) et (AD). En déduire f(A).

d) Montrer que f(O)= I.

2) Soit g le déplacement qui transforme A en E et D en A.

a) Déterminer (gog)(D) puis caractériser gog.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.

c) Montrer que g = $t_{\overrightarrow{AE}}$ o f^{-1}.

3) Soit h l'antidéplacement qui transforme B en D et D en E.

a) Montrer que h est une symétrie glissante et préciser ses éléments caractéristiques.

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que f(M)=h(M).

Exercice 3 (5 points)

1) Soit f la fonction définie sur]-∞,π[par : f(x)= $\begin{cases} \sqrt{x^2+1}+x-1 \; si \; x<0 \\ 2\ tan(\frac{x}{2}) \quad si\ 0 \le x < \pi \end{cases}$.

($\boldsymbol{C_f}$)est sacourbe représentative dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

a) Montrer que f est continue sur]-∞, π[.

b) Montrer que f est dérivable sur]-∞, π[. Former une équation de la tangente (T) à ($\boldsymbol{C_f}$).

c) Dresser le tableau de variation f puis tracer ($\boldsymbol{C_f}$).

2) Soit g la restriction de f à]-∞, 0].

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1}définie sur]-1, 0].

b) Déterminer g^{-1}(x) en fonction de x pour $x \in$]-1, 0].

3) Soit h la restriction de f à [0, π[.

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1}définie sur [0, +∞[puis calculer h^{-1}(2).

b) Montrer que h^{-1} est dérivable sur [0, +∞[et que $(h^{-1})'(x)=\frac{4}{4+x^2}$; pour tout $x \in$[0, +∞[.

4) Soit φ la fonction définie sur]0,+∞[par : φ(x)= $h^{-1}(\sqrt{2x}\,)+ h^{-1}(\frac{4}{\sqrt{2x}})$.

a) Montrer que φ est dérivable sur]0, +∞[et calculer φ'(x).

b) En déduire que pour tout $x \in$]0,+∞[; $h^{-1}(\sqrt{2x}\,)=\pi- h^{-1}(\frac{4}{\sqrt{2x}})$.

Exercice 4 (5 points)

Soit n ∈ IN et f_n la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par f_n(x)= x+(1-2n²)(1-sin x).*

1) a) Montrer que l'équation f_n(x)=0 admet une unique solution u_n dans $[0,\frac{\pi}{2}]$, donner le signe de f_n(x)sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ puis établir que $sin(u_n)= 1 - \frac{u_n}{2n^2-1}$.

b) Montrer que pour tout n ∈ IN et pour tout x∈ $[0,\frac{\pi}{2}]$; $f_{n+1}(x) \le f_n(x)$, déduire que la suite (u_n) est croissante puis qu'elle est convergente et calculer sa limite. $lim_{n\to+\infty}\, u_n$.*

2) a) Montrer que f_n admet une fonction réciproque ${f_n}^{-1}$ définie sur [1-2n² , $\frac{\pi}{2}$] puis calculer ${f_n}^{-1}$(0) et ${f_n}^{-1}$(1-2n²).

b) Montrer que ${f_n}^{-1}$ est dérivable sur [1-2n² , $\frac{\pi}{2}$] puis calculer $({f_n}^{-1})'$(1-2n²).

c) Montrer que $({f_n}^{-1})'(0)= \frac{1}{1+\sqrt{2(2n^2-1)u_n-{u_n}^2}}$.

3) Soit g la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par g(x)= $\begin{cases} g(x) = \frac{1+f_1(x)}{x} \; si \; x \in]0,\frac{\pi}{2}] \\ g(0) = 2 \end{cases}$.

a) Montrer que g est continue à droite en 0 et justifier que $g(u_1)= \frac{1}{u_1}$.

b) Soit t ∈ $]0,\frac{\pi}{2}]$ et h la fonction définie sur [0,t] par h(x)= ($\frac{sin\, t-t}{t^2}$) x² +x - sin x.

Calculer h(0) et h(t) puis montrer qu'il existe c ∈ $]0,t[$ tel que $\frac{sin\, t-t}{t^2} = \frac{cos\, c-1}{2c}$.

En déduire que g est dérivable à droite en 0 et donner ${g'}_d$(0).