❄ **Médenine-Monastir** ❄ **2023-2024** ❄

4ème Maths ❄ **Devoir de Synthèse 1** ❄ **Durée : 3 h**

Profs : ✍ **Selmi.M** ✍ **Khaled.B** ✍ **Zrafi.K** ✍ **Mbarki.J** ✍ ✍ **Haj Salem.H** ✍ **Harabi.A** ✍**Haj Rhouma A.** ✍

Dream big, work hard, make it happen.

Exercice 1 (4 points)

On considère dans $\mathbb{C}$,l'équation $(E) : z^2-\left(e^{i\theta}-ie^{-i\theta}+2\right)z-i+2e^{i\theta}=0$ où θ est un réel de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

1. a) Vérifier que $z_1=e^{i\theta}$ est une solution de l'équation (E).

   b) Déterminer l'autre solution z_2 de (E) puis vérifier que $z_2=-i\bar{z}_1+2$

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(2)$ et $B(2-i)$.
   On considère l'application f du plan dans lui même qui
   à chaque point $M(z)$ associe le point $M\left(z'\right)$ tel que $z'=-i\bar{z}+2$.

   a) Montrer que f est une isométrie.

   b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

   c) Déterminer $f(O), f(I)$ et $f(J)$.

   d) En déduire que f est une symétrie glissante dont on précisera son axe et son vecteur.

3. a) Déterminer et construire l'ensemble des points $M(z_1)$ lorsque θ décrit $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

   b) En déduire l'ensemble des points $M'(z_2)$ lorsque θ décrit $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 2 (3 points)

Soit la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on désigne par $f^{(n)}$ la dérivée nième de f.

   a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

   b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*, f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$.

2. Pour tout entier naturel $n\geq 3$, on considère la suite (U_n) définie par $U_n=\left|f^{(n)}(4)\right|$.

   a) Vérifier que $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}=\dfrac{n+1}{2}$, en déduire la suite (U_n) est croissante.

   b) Montrer que pour tout entier naturel $n\geq 3, U_n\geq 3\times 2^{n-6}$, en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 3 **(7 points)**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$ par $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. a) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, $f'(x)=\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

   b) Montrer que f réalise une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   c) Tracer les courbes $\mathscr{C}$ de f et $\mathscr{C}'$ de f^{-1} ,en précisant la demi tangente au point d'abscisse 0.

   d) Expliciter $f^{-1}(x)$, pour $x \in J$.

2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=f(\sin(x))$..

   a) Vérifier que pour $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ on a : $g(x)=\tan(x)$.

   b) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $[0,+\infty[$.

   c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $\left(g^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

3. Soit h la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} h(x)=g^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x>0 \\ h(0)=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

   a) Montrer que h est continue à droite en 0.

   b) Montrer que h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $h'(x)$.

   c) Monter que pour tout $x>0$, $g^{-1}(x)+g^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

   d) Déduire que h est dérivable à droite en 0 et calculer $h'_d 0)$.

4. On considère les suites (S_n) et (U_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

   $S_n=\sum_{k=1}^{n} g^{-1}(k+1)-g^{-1}(k)$ et $U_n=g^{-1}\left(\dfrac{2}{n}\right)-g^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

   a) Montrer que $S_n=-\dfrac{\pi}{4}+g^{-1}(n+1)$. Déduire alors $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n$.

   b) Montrer qu'il existe un reel $c_n \in]0,1[$ tel que $nU_n=\dfrac{1}{1+{c_n}^2}$.
   Déduire alors $\lim\limits_{x\to+\infty} nU_n$.

   c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*, 0<U_n<\dfrac{n}{2}$.

   d) Montrer que $\tan(U_n)=\dfrac{n}{n^2+2}$. Déduire alors $\lim\limits_{x\to+\infty} n\tan(U_n)$.

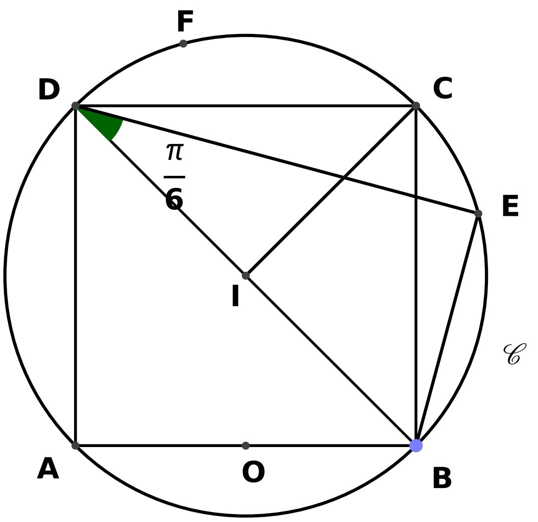
N-B : On donne $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}$

Exercice 4 **(6 points)**

Le plan est orienté dans le sens direct, sur la figure ci dessous et en page annexe, on considère un carré ABCD de centre I tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

$\mathscr{C}$ est le cercle circonscrit au carré ABCD,E le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DE}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ et F est le point tel que le triangle ICF est équilatéral direct.

1. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie B en C et C en D.
   b) Prouver que f est une rotation dont on précisera une mesure de son angle et son centre.
   c) Déterminer $f(E)$. en déduire la nature du triangle IEF.
2. On pose $g = R_{(B,\frac{\pi}{6})} \circ R_{(E,-\frac{\pi}{2})}$.
   a) Caractériser $\mathrm{S}_{(\mathrm{BE})} \circ \mathrm{S}_{(\mathrm{CE})}$.
   b) En déduire que $\mathrm{g} = \mathrm{R}\left(\mathrm{c}, -\frac{\pi}{3}\right)$.
3. a) Déterminer $g \circ f(B)$ et $g \circ f(I)$.
   b) Montrer que $g \circ f$ est une rotation dont on précisera une mesure de son angle ; puis construire son centre Ω.
4. On pose $h = f \circ S_{(BC)}$.
   a) Déterminer $h(B)$ et $h(C)$.
   b) Déduire que h est une symétrie glissante et préciser son vecteur.
   c) Soit G le milieu de [BC]. Montrer que la droite (GF) est l'axe de la symétrie glissante h.
   d) Pour tout point M du plan :
   On pose $M_1 = S_{(BC)}(M); M_2 = f(M)$ et N le milieu du segment $[M_1M_2]$.
   Montrer que le point N se déplace sur une droite fixe que l'on précisera lorsque le point M varie dans le plan P.



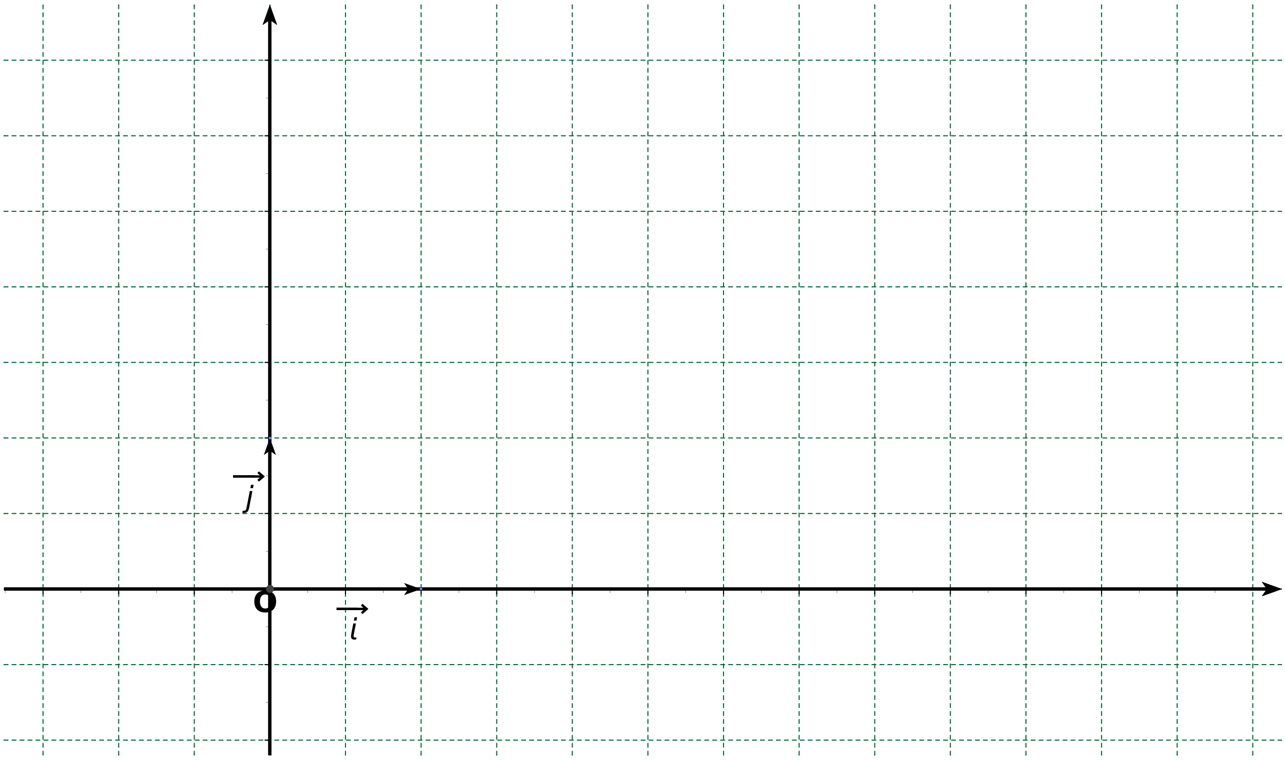
BON TRAVAIL

ANNEXE A RENDRE

Nom et prénom :...

Classe et Numéro..............

Exercice 3 :



Exercice 4 :