LYCEE IBN SINA MAHDIA LYCEE EL ALIA BIZERTE Mr YASSINE BACCAR Mr LAHBIB GHALEB	**EXEMPLE1 : DEVOIR DE SYNTHESE N°1**	
	Epreuve : **MATHMATIQUES**	Classe : **4 MATHS**
	Durée : 3 h	2023-2024

Le sujet comporte 4 pages numérotées 1/4 , 2/4 , 3/4 et 4/4

Exercice 1 (5 points)

Soit l'équation (E) : $z^2 - 2(1+i\cos\theta)z + 2i\cos\theta = 0 \quad \theta \in \left]0, \pi\right[$.

1. a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E).

   b) On note $z_1 = 1 + ie^{i\theta}$ et $z_2 = 1 + iei^{i\theta}$. Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne parA, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $1, z_1$ et z_2.

   a) Déterminer l'ensemble décrit par M_1 lorsque θ décrit $]0, \pi[$.

   b) Soit I le milieu du segment $[M_1M_2]$; déterminer l'ensemble décrit par I lorsque θ décrit $]0, \pi[$.

3. Soit l'application $f : P \rightarrow P \; M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = e^{-2i\theta}z + 2i\sin\theta e^{-i\theta}$.

   a) Montrer que $f(M_1) = M_2$.

   b) Montrer que f est une rotation que l'on caractérisera.

   c) Préciser la nature du triangle AM_1M_2 et déterminer (la ou les) valeur(s) de θ pour que AM_1M_2 soit un triangle rectangle .

4. a) Montrer que lorsque θ varie sur $]0, \pi[$, la droite (M_1M_2) a une direction fixe.

   b) En déduire (la ou les) valeur(s) de θ pour que OAM_2M_1 soit un losange.

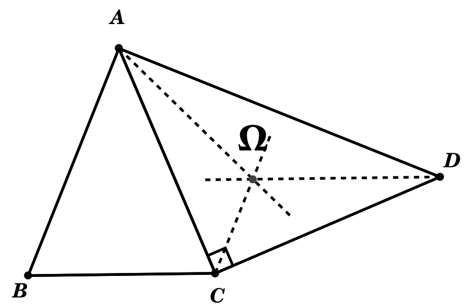
Exercice 2 (5 points)

Le plan orienté dans le sens direct.

ABC est un triangle isocèle en A tels que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

CDA est un triangle rectangle isocèle en C de sens direct.

On désigne par Ω le point d'intersection des bissectrices du triangle ACD.



1. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R tel que $R(A) = D$ et $R(B) = C$.
   b) Montrer que R est une rotation dont on précisera l'angle.
   c) Construire son centre O.
   d) Montrer que le quadrilatère $OCAB$ est un losange.
2. Soit $f = R_{(A,\frac{\pi}{4})} \circ R_{(C,\frac{\pi}{2})}$.
   a) Construire $C' = f(C)$.
   b) Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle.
   c) Déterminer la droite Δ telle que $R_{(C,\frac{\pi}{2})} = S_{(AC)} \circ S_{\Delta}$.
   d) Montrer que Ω est le centre de f.
3. Soit $g = f \circ R$.
   a) Déterminer $g(A)$ puis caractériser g.
   b) Montrer que le triangle ABC' est rectangle et isocèle en A.
   c) Montrer que les points B, C' et Ω sont alignés
4. Soit $h = R \circ S_{(BC)}$.
   a) Montrer que h est une symétrie glissante.
   b) Déterminer $h(A)$ et $h(B)$.
   c) Soit I est le milieu de $[BC]$ et $I' = h(I)$. Montrer que I' est le milieu de $[OD]$.
   d) Déterminer la forme réduite de h.

Exercice 3 **(5 points)**

I) Soit f la fonction définie sur $]-\infty,1]$ par $f(x)=\dfrac{-2}{1+\sqrt{1-x}}$.

1. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1. Interpréter graphiquement le résultat.
2. a. Montrer que pour tout $x\in]-\infty,1[$, $f'(x)=-\dfrac{(f(x))^2}{4\sqrt{1-x}}$.
   b. Dresser le tableau de variation de f.
   c. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.
3. a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sue $[-2,0[$.
   b. Étudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en -2.
   c. Tracer la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

II) Soit g la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $g(x)=f\left(\cos^2 x\right)$.

1. Vérifier que pour tout x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $g(x)=\dfrac{-2}{1+\sin x}$.
2. Montrer que g réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[-2,-1]$.
3. a. Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[-2,-1[$.
   b. Montrer que $\left(g^{-1}\right)'(x)=\dfrac{-1}{x\sqrt{-(x+1)}}$ pour tout x de $[-2,-1[$.
4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $U_n=\left(n+n^2\right)\cdot\left(g^{-1}\left(-2+\dfrac{1}{n}\right)-g^{-1}\left(-2+\dfrac{1}{n+1}\right)\right)$.
   a. Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, il existe un réel $\alpha_n\in\left]-2+\dfrac{1}{n+1},-2+\dfrac{1}{n}\right[$ tel que $U_n=\dfrac{-1}{\alpha_n\sqrt{-(1+\alpha_n)}}$.
   b. En déduire la limite de la suite U.

Exercice 4 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,2[$ par : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}} & \text{si } 0\le x<2 \\ f(x)=1+\dfrac{2x}{\sqrt{4x^2+1}} & \text{si } x<0 \end{cases}$.

On désigne par (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

1. a) Etudier la dérivabilité de f en 0.

   b) Montrer que f est dérivable sur $]0,2[$ et que $\forall x\in]0,2[$ on a :

$$f'(x)=\frac{2}{(2-x)\sqrt{4-x^2}}.$$

   c) Dresser le tableau de variation de f sur $]-\infty,2[$.

   d) Tracer la courbe (C_f).

2. Montrer que f' est strictement croissante sur $]0,2[$.

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2n}{(2n-k)\sqrt{4n^2-k^2}}$.

   a) Vérifier que $\forall n\in\mathbb{N}^*: S_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f'\left(\frac{k}{n}\right)$

   b) Montrer en utilisant les accroissements finis que :

   Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{1}{n}f'\left(\dfrac{k}{n}\right)\le f\left(\dfrac{k+1}{n}\right)-f\left(\dfrac{k}{n}\right)\le\dfrac{1}{n}f'\left(\dfrac{k+1}{n}\right)$.

   c) En déduire que la suite (S_n) est convergente et déterminer sa limite.

4. Soit g la fonction définie sur $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ par : $\begin{cases} g(x)=f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) & \text{si } x\in\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right] \\ g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$

   a) Montrer que g est continue à droite en $\dfrac{\pi}{2}$.

   b) Montrer que g est dérivable sur $\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ et calculer $g'(x)$.

   c) Montrer que pour tout $x\in\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$, il existe $c\in\left]\dfrac{\pi}{2},x\right[$ tel que :

$$\frac{g(x)}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{-\sin(2c)}{\left(\sqrt{4+\cos^2 c}\right)^3}.$$

   d) En déduire que g est dérivable à droite en $\dfrac{\pi}{2}$ et que $g'_d\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

   e) Dresser le tableau de variation de g.