Kooli Mohamed Hechmi	Niveau : 4ème Mathématiques	
	Date 2023 /2024	Durée : 3 heures
Devoir de synthèse n°1 en mathématiques (type 2)		

Exercice 1

Soit la fonction $f : x \mapsto 1 + \sin(\pi x)$; $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et soit C_f sa courbe représentative

dans repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f admet une fonction réciproque que l'on note f^{-1} et déterminer son domaine de définition on notera $C_{f^{-1}}$ sa courbe représentative.

2) a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, 2[$.

b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en 0 (graphiquement) et étudier la dérivabilité de f^{-1} à gauche en 2 (par le calcul).

c) Vérifier que : $\forall x \in]0, 2[\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}$

3) Soit la fonction g définie sur $]0, 2[$ par : $g(x) = f^{-1}(2-x) + f^{-1}(x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]0, 2[$.

b) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0, 2[$.

c) Calculer $g(1)$. En déduire que : $\forall x \in]0, 2[$ on a : $f^{-1}(2-x) = -f^{-1}(x)$.

4) Soit la suite réelle U définie sur IN^* par : $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)$

a) Montrer que $\forall n \in IN^*$; $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ on a :

$f^{-1}\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \leq f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n+k}\right) \leq f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

b) En déduire que : $\forall n \in IN^*$ on a : $\frac{n+1}{n} f^{-1}\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \leq U_n \leq \frac{n+1}{n} f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$

c) Calculer la limite de la suite U.

Exercice 2

Soit $ABDC$ un rectangle direct de centre O tel que $AC = 2AB$. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[AC]$; $[AI]$ et $[BD]$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui envoie A en I et B en C puis vérifier que f est une symétrie glissante.

b) Déterminer l'image du triangle ABI par f. En déduire que $f(I) = K$.

c) Déterminer la forme réduite de f.

d) Soit $H = f(O)$. Montrer que IJKH est un parallélogramme.

2) Soit $g = f \circ S_{(AB)}$.

a) Déterminer $g(A)$ et $g(B)$.

b) Montrer que g est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Construire son centre G.

c) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Justifier que $g = t_{\overrightarrow{AI}} \circ R$.

3) Soit E l'image du point I par R et soit le point F tel que $AEFI$ soit un carré.

a) Caractériser $g \circ g$.

b) Déterminer $g \circ g(A)$ et en déduire que G est le centre du $AEFI$.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $]0\,,1]$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x} - 1}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et pour tout $x \in]0, 1[$ on a :

$$f'(x) = \frac{-1}{4x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}$$

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0\,,1]$ sur $[1\,,+\infty[$.

b) Montrer f admet une fonction réciproque f^{-1} et déterminer son domaine de définition.

c) Tracer (C) et (C') courbe représentative de f^{-1}.

3) Soit g la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = f(cos^2 x)$. Soit (C_g) sa courbe représentative.

a) Montrer que pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $g(x) = \frac{1}{2}\tan x$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α autre que 0 et que $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}\,,\frac{\pi}{2}\right[$.

c) Etudier la position relative de la droite Δ: $y = x$ et la courbe (C_g).

4) **a)** Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $g^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $(g^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur I et que pour tout $x \in J$ on a $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{4x^2+1}$.

5) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = g^{-1}(U_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq U_n \leq \alpha$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

6) Soit la suite S_n définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left[g^{-1}\left(\frac{k+1}{2}\right) - g^{-1}\left(\frac{k}{2}\right)\right]$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$

Exercice 4

Soit $ABCD$ un carré de centre O et tels que $(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Soient I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AD]$ et R la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

1) Caractériser chacune des isométries suivantes :

$f_1 = S_{(OJ)}\ o\ S_{(OA)}$ et $f_2 = f_1\ o\ S_{(AC)}$

2) **a)** Montrer qu'il existe un unique déplacement g tel que $g(B) = A$ et $g(A) = D$

b) Caractériser g

c) Déterminer $R\ o\ g(B)$ puis caractériser $R\ o\ g$

d) Caractériser $R^{-1}\ o\ g$

3) Soit φ l'antidéplacement qui envoie B sur A et A sur D.

a) Montrer que φ est une symétrie glissante dont on précisera les éléments caractéristiques.

b) On pose $h = R\ o\ \varphi$. Déterminer $h(I)$ et $h(A)$ puis caractériser h

4) On pose $\sigma = \varphi^{-1}\ o\ g$

a) Caractériser σ

b) En déduire l'ensemble Γ des points M du plan vérifiant $g(M) = \varphi(M)$