Kooli Mohamed Hechmi	Niveau : 4ème Mathématiques	
	Date 2023 /2024	Durée : 3 heures
Devoir de synthèse n°1 en mathématiques (type 1)		

Exercice 1

Soit ABC un triangle isocèle et rectangle tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit O le milieu de $[AC]$.

On désigne par I le milieu de $[OB]$ et par D le symétrique de O par rapport à (BC).

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = C$ et $f(O) = D$.

   b) Montrer que f est une rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

   c) Soit $E = f(I)$ .Montrer que E est le milieu de $[BD]$.

2) On pose $g = S_{(BO)} \, o \, S_{(AB)} \, o \, f^{-1}$.

   a) Montrer que g est un déplacement.

   b) Déterminer $g(B)$ et $g(C)$ et en déduire que $f^{-1} = S_{(AB)} \, o \, S_{(BO)}$.

3) On pose $h = S_{(OD)} \, o \, f^{-1}$. On désigne par Δ la médiatrice du segment $[BD]$.

   a) Déterminer $h(B)$ et $h(D)$.

   b) Montrer que $h = S_{\Delta} o \, t_{\overrightarrow{BO}}$

4) Déterminer l'ensemble des ponts M du plans tel que : $f(M) = h^{-1}(M)$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + \frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$ et soit (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

   b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

   c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que le point $I(0, 1)$ est un centre de symétrie de (C_f).

b) Donner une équation de la tangente T à (C_f) au point I.

c) Tracer (C_f) et la droite $\Delta : y = x$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 2[$.

b) Montrer que pour tout $x \in]0, 2[$ on a : $f^{-1}(x) = \frac{2(x-1)}{1-(x-1)^2}$

c) Tracer la courbe $(C_{f^{-1}})$ de la fonction f^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.)

4) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} g(x) = f(\tan x) & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

b) Montrer pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a : $g(x) = 1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

c) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[1, 2]$.

d) Soit g^{-1} la fonction réciproque de g, montrer que g^{-1} est dérivable sur $[1, 2]$ et que $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{1+(x-1)^2}$

e) Montrer pour tout $x \in [1, 2]$ on a : $g^{-1}(x) + g^{-1}\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \sum_{k=0}^{n} g^{-1}\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)$ et $V_n = \frac{U_n}{n+1}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g^{-1}\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \leq g^{-1}\left(1 + \frac{1}{n+k}\right) \leq g^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} V_n$

c) Soit $W_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} g^{-1}\left(\frac{2(n+k)}{1+n+k}\right)$ Calculer $\lim_{n \to +\infty} W_n$

Exercice 3

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E): $iz^2 + (1-i)e^{i\theta}z - 2e^{2i\theta}$, où $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A et B les points d'affixes respectives $e^{i\theta}$ et $ie^{i\theta}$, Soit I le milieu du segment $[AB]$.

a) Montrer que le triangle OAB est isocèle et rectangle en O.

b) Déterminer le module et un argument de l'affixe de .

3) Soit f l'application du plan dans lui-même qui à chaque point M d'affixe $z \neq e^{i\theta}$ on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{e^{i\theta}+iz}{e^{i\theta}-iz}$

a) Montrer que pour tout $z \neq e^{i\theta}$, on a :

$OM' = \frac{MB}{MA}$ et que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) - \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

b) En déduire une construction de M' lorsque M est le barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 1)$.

Exercice 4

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose $f_n(x) = x^3 - 2nx + 1$

1) Montrer que la fonction f_n est strictement décroissante sur $[0\ ,1]$

2) Prouver que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n dans $[0\ ,1]$

3) a) Vérifier que, pour tout entier ≥ 2 , $f_{n+1}(a_n) = -2a_n$

b) Montrer alors que la suite (a_n) ainsi définie est décroissante.

c) En déduire que la suite (a_n) est convergente.

4) a) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $a_n \leq \frac{1}{n}$

b) En déduire la limite de la suite (a_n)